

線形代数学 B 第 3 回レポート (担当:山木 壱彦)

2007 年 12 月 11 日 配布

2008 年 1 月 7 日 提出

問題

問 1

$\mathbb{R}^3$ の基底

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をシュミットの直交化法で直交化せよ.

問 2

V を有限次元計量ベクトル空間とし, W_1, W_2 をその部分ベクトル空間とする. このとき,

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp, \quad (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$$

を示せ.

問 3

次の場合について, $W^\perp$ の正規直交基底を一組求めよ.

$$V = \mathbb{R}^3, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

問 4

$\mathbb{R}^3$ において, 平面 $x + y + z = 0$ への正射影を与える行列を求めよ.

問 5

直交行列の行列式は ± 1 であることを示せ. また, 行列式は 1 であるが, 直交行列でないような正方行列の例を挙げよ.

解答

問 1

問題には「シュミットの直交化法で直交化せよ」とあるが,老婆心からシュミットの直交化法で**正規**直交化することにする.求める正規直交基底を $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ とおくと,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \quad \text{とおくと,} \\ \mathbf{b}_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left((-1 \ 0 \ 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4}(1+1+4)} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{より,} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \quad \text{とおくと,} \\ \mathbf{b}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left((0 \ 2 \ 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left((0 \ 2 \ 1) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{b}_3\| = \sqrt{\frac{1}{9}(1+1+1)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{より,} \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

問 2

$v \in (W_1 + W_2)^\perp$ を同値変形すると, $\iff$ 任意の $w \in (W_1 + W_2)$ において, $(v, w) = 0$
 $\iff$ 任意の $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ において, $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2) = 0 \cdots \cdots (1)$

$v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$ を同値変形すると, $\iff v \in W_1^\perp$ かつ $v \in W_2^\perp$
 $\iff \begin{cases} v \in W_1^\perp \iff \text{任意の } w_1 \in W_1 \text{ において, } (v, w_1) = 0 \\ v \in W_2^\perp \iff \text{任意の } w_2 \in W_2 \text{ において, } (v, w_2) = 0 \end{cases} \cdots \cdots (2) \text{ であるから,}$

$v \in (W_1 + W_2)^\perp$ のとき,

$$w_1, w_2 \text{ は任意だから, } \begin{cases} w_2 = 0 \text{ とおくと } (v, w_1) = 0 \\ w_1 = 0 \text{ とおくと } (v, w_2) = 0 \end{cases} \implies (2) \therefore (W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

$v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$ のとき,

$$(v, w_1) = (v, w_2) = 0 \text{ より, } (v, w_1) + (v, w_2) = 0 \implies (1) \therefore W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp$$

$$\text{以上より, } (W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

まず, $(W^\perp)^\perp = W$ を認めて議論を進める. $K_1 = W_1^\perp, K_2 = W_2^\perp$ とおくと, 上記の結論より

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2)^\perp &= K_1^\perp \cap K_2^\perp \iff (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = (W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp \\ &\iff (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = W_1 \cap W_2 \\ &\iff \left\{ (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp \right\}^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp \\ &\iff W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp \end{aligned}$$

となるから, $(W^\perp)^\perp = W$ を示せばよい.

$V = W \oplus W^\perp$ とする. $u \in W$ としたとき, $\forall w \in W^\perp$ に対して $(u, w) = 0$ より, $u \in (W^\perp)^\perp$ となる.

$$\therefore W \subset (W^\perp)^\perp$$

次に, $W \supset (W^\perp)^\perp$ を示す. $w \in (W^\perp)^\perp \subset V$ としたとき,

$w_1 \in W, w_2 \in W^\perp$ において, $w = w_1 + w_2$ と書ける.

$w \in (W^\perp)^\perp$ より, $\forall v \in W^\perp$ に対して $(w, v) = 0$ が成り立つ. 特に $v = w_2$ のとき, $(w, w_2) = 0$ が成り立つ.

$$\iff (w_1, w_2) + (w_2, w_2) = 0$$

ここで, $w_1 \in W, w_2 \in W^\perp$ より $(w_1, w_2) = 0$ よって, $(w_2, w_2) = 0 \iff w_2 = 0$

すなわち $w = w_1$ より, $w \in W$ が言えた.

$$\therefore W \supset (W^\perp)^\perp$$

以上より, $(W^\perp)^\perp = W$ が言えたので, 題意は示された.

問 3

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W^\perp$ とすると, 直交補空間の定義より, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 \mathbf{a}_1 + x_3 \mathbf{a}_2 \text{ とかける. } \left(\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

あとは問 1 と同様にして, 正規直交基底を $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ とおくと,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \quad \text{とおくと,} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4}(1+1+4)} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{より,} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問 4

$\mathbb{R}^3$ 上の任意の点を $P(x, y, z)$ と, $\overrightarrow{OP}$ の平面 $x + y + z = 0$ への正射影ベクトルを $\overrightarrow{OQ}$ とする.

平面 $x + y + z = 0$ の法線ベクトルは $(1, 1, 1)$ だから, $\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (k, k, k) \\ \overrightarrow{OQ} = (x - k, y - k, z - k) \end{cases}$ とかける.

ここで, 三平方の定理より, $OQ^2 + QP^2 = OP^2$

$$\iff (x - k)^2 + (y - k)^2 + (z - k)^2 + (k^2 + k^2 + k^2) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\iff -2kx - 2ky - 2kz + 6k^2 = 0$$

$$\iff 2k(3k - x - y - z) = 0$$

$$\iff k = 0, \frac{x + y + z}{3}$$

$k = 0$ のとき, 点 P が平面 $x + y + z = 0$ 上にあるから正射影を与えるまでもないけど,

でも, どうしても, 是が非でも, 何としてでも, あえてその行列を書くとすれば, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$k = 3 \text{ のとき, } \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

$$\text{したがって, 求める行列は } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

問 5

直交行列を A とおくと, $A^t A = I$, 両辺の行列式をとると, $(\det A)^2 = \det I = 1 \quad \therefore \det A = \pm 1$

また, 行列式は 1 であるが, 直交行列でないような正方行列の例としては, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ などがある.