

線形代数学 B 第 2 回レポート (担当:山木 壱彦)

2007 年 11 月 27 日 配布

2007 年 12 月 17 日 提出

問題

問 1

V と U が K 上のベクトル空間のとき、

$$L(V, U) := \{f : V \rightarrow U \mid f \text{ は } K \text{ 上線形} \}$$

は自然に K 上のベクトル空間であることを示せ。

問 2

$c_0, \dots, c_{k-1} \in K$ とする。 $K^{\mathbb{N}}$ の部分集合

$V := \{(a_n) \in K^{\mathbb{N}} \mid \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ について } a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = 0\}$ を考える。

(1) V は部分ベクトル空間であることを示せ。

(2) $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ が X についての多項式 $X^k + c_{k-1}X^{k-1} + \dots + c_1X + c_0$ の相異なる根であるならば、 k 個の数列 $(\alpha_1^{n-1}), \dots, (\alpha_k^{n-1})$ は V の基底を成すことを示せ。

問 3

V を有限次元ベクトル空間とし、 $v_1, \dots, v_k \in V$ とする。もし $v_1, \dots, v_k$ が一次独立であるならば、任意のベクトル空間 U と任意の $u_1, \dots, u_k \in U$ に対し、線形写像 $f : V \rightarrow U$ で $f(v_j) = u_j (j = 1, \dots, k)$ なるものが存在することを示せ。

問 4

$W_1, \dots, W_k$ を有限次元ベクトル空間の部分ベクトル空間とする。もし

$$\dim(W_1 + \dots + W_k) = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_k)$$

なら、 $W_1, \dots, W_k$ は直和条件を満たすことを示せ。

*1 訂正 (補足): c_0 は 0 でないと仮定する。

解答

問 1

$L(V, U)$ 上の自然な和は $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, 自然なスカラー倍は $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ であり、これらの演算について $L(V, U)$ が K 上のベクトル空間であることを示す。

$\forall x \in V$ に対して、 $f(x), g(x), h(x), 0(x) \in U$, $1, \lambda, \mu \in K$ とする。

$$\begin{aligned} (1) ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \quad (\because \text{初めに決めた定義より}) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \quad (\because f(x), g(x), h(x) \in U : \text{ベクトル空間より}) \\ &= (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$

$$\text{よって、} (f + g) + h = f + (g + h)$$

(2) 写像 $0 : V \rightarrow U$ を $\forall x \in V; 0(x) = 0 \in U$ と定める。そして、これが線形であることを示す。

$$(0 + f)(x) = 0 + f(x) = f(x) \quad (\because f(x) \in U : \text{ベクトル空間より})$$

$$\text{よって、} 0 + f = f$$

(3) 写像 $h : V \rightarrow U$ を $\forall x \in V; h(x) = -f(x) \in U$ と定める。

$$(h + f)(x) = -f(x) + f(x) = 0 \quad (\because f(x), -f(x) \in U : \text{ベクトル空間より})$$

$$\text{よって、} h + f = 0$$

以下、同様にして、

$$(4) f + g = g + f$$

$$(5) \lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$$

$$(6) (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$$

$$(7) (\lambda \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$$

$$(8) 1 \cdot f = f$$

が示される。すなわち、 $L(V, U)$ がベクトル空間の公理を満たしていることが示されたので、題意は示された。

問 2

(1) $(a_n), (b_n) \in V$ $\lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda(a_n) + \mu(b_n) \in V$ であることを示せばよい。

$$\text{仮定より、} \begin{cases} a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = 0 \\ b_{n+k} + c_{k-1}b_{n+k-1} + \cdots + c_1b_{n+1} + c_0b_n = 0 \end{cases} \quad \text{だから、}$$

$$\forall n; (\lambda a_{n+k} + \mu b_{n+k}) + c_{k-1}(\lambda a_{n+k-1} + \mu b_{n+k-1}) + \cdots + c_1(\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) + c_0(\lambda a_n + \mu b_n) = 0$$

したがって、 $\lambda(a_n) + \mu(b_n) \in V$ であることが示された、すなわち、 V は部分ベクトル空間である。

(2) まず、一次独立性を示す。 $\lambda_1(\alpha_1^{n-1}) + \cdots + \lambda_k(\alpha_k^{n-1}) = 0$ とおく。

これに、 $n = 1, 2, \cdots, k$ を代入していく。(ここで、 $c_0 \neq 0$ より、 0 が根になることはないので、 $n = 1$ を代入してもよい)

$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0 \\ \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_k \alpha_k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_1^{k-1} + \cdots + \lambda_k \alpha_k^{k-1} = 0 \end{cases}$$

すなわち、
$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

の、左側の行列 A が正則であることを示せばよい。

$$\det A = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0 \quad (\because \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ は相異なる根だから。})$$

よって、
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が言えたので、一次独立性が示された。

次に、 $\dim V \leq k$ を示す。

$$\begin{cases} (a_n^{(1)}) \Rightarrow a_1^{(1)} = 1, a_2^{(1)} = \cdots = a_k^{(1)} = 0 \\ (a_n^{(2)}) \Rightarrow a_1^{(2)} = 0, a_2^{(2)} = 1, a_3^{(2)} = \cdots = a_k^{(2)} = 0 \\ \vdots \\ (a_n^{(k)}) \Rightarrow a_1^{(k)} = \cdots = a_{k-1}^{(k)} = 0, a_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

すなわち、 $(a_n^{(i)}) \Rightarrow a_i^{(i)} = 1, a_{i \text{ 以外}}^{(i)} = 0$ と定める。

このとき、 $(a_n) = a_1(a_n^{(1)}) + \cdots + a_k(a_n^{(k)})$ と書ける。よって、 $\dim V \leq k$ が言えた。

以上より、 $(\alpha_1^{n-1}), \dots, (\alpha_k^{n-1})$ は V の基底を成す。

問 3

必要であれば、 $v_{k+1}, \dots, v_n$ を加えて、 $v_1, \dots, v_n$ が V の基底となるようにする。

このとき、 $\forall v \in V; \quad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ と書けて、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は v に対して唯 1 通りに決まる。さて、 $f(v) := \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k (\in U)$ と定める。

これによって、写像 $f: V \rightarrow U$ が決まった。なお、 $f(v_j) = \begin{cases} u_j & (j = 1, \dots, k) \\ 0 & (j \geq k+1) \end{cases}$ とする。

(Ex: $v_j = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + \cdots + 0 \cdot v_n$) これより、 $f(v_j) = u_j$ が成り立っている。

続いて、 f が線形であることを示す。 $\begin{cases} v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \\ v' = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n \end{cases}$ とする。

このとき、 $v + v' = (\lambda_1 + \lambda'_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda'_n)v_n$ であり、

先ほどの定義から、

$$\begin{aligned} f(v + v') &= (\lambda_1 + \lambda'_1)u_1 + \cdots + (\lambda_k + \lambda'_k)u_k \\ &= (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k) + (\lambda'_1 u_1 + \cdots + \lambda'_k u_k) \\ &= f(v) + f(v') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f(\lambda \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda \lambda_n v_n) \\ &= \lambda(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k) \\ &= \lambda f(v) \end{aligned}$$

以上より、 f の線形性が示され、題意も示された。

問 4

$$\dim(W_1 + \cdots + W_k) \leq \dim W_1 + \cdots + \dim W_k \quad (*)$$

が成り立つことを、数学的帰納法で示す。

$k = 1$ のとき、明らか。

$k = i$ のときの成立を仮定する、すなわち、

$\dim(W_1 + \cdots + W_i) \leq \dim W_1 + \cdots + \dim W_i$ と仮定すると、

$k = i + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + \cdots + W_{i+1}) &= \dim(W_1 + \cdots + W_i) + \dim W_{i+1} - \dim((W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1}) \\ &\leq (\dim W_1 + \cdots + \dim W_i) + \dim W_{i+1} - \dim((W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1}) \\ &\leq \dim W_1 + \cdots + \dim W_{i+1} \end{aligned}$$

よって、 $(*)$ は成立する。なお、 $(*)$ の等号が成り立つのは、 $\dim((W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1}) = 0$ のとき、

$$\text{すなわち、} \begin{cases} W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \\ (W_1 + W_2) \cap W_3 = \{\mathbf{0}\} \\ \vdots \\ (W_1 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad \text{これこそが、直和条件に他ならない。}$$

したがって、等号が成立するとき（すなわち問題の仮定を満たすとき）、直和条件を満たしている。