

線形代数学 B 第 1 回レポート (担当:山木 壱彦)

2007 年 11 月 13 日 配布

2007 年 12 月 3 日 提出

問題

1 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

を計算せよ。

2 等式

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$$

を示せ。ここで、左辺は n 次行列式である。

3 行列

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

について、 A と ${}^tA$ との積を計算し、 $\det A$ を求めよ。

4 n 次正方行列 A および n 次元縦ベクトル $\mathbf{b}$ の成分はすべて整数であるとする。変数 $x_1, \dots, x_n$ を成分とする縦ベクトルを $\mathbf{x}$ として、 $x_1, \dots, x_n$ についての連立一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (*)$$

を考える。次を示せ。

- (1) $\det A = \pm 1$ ならば、 $(*)$ はただ一組の整数解を持つ。
- (2) 任意の整数成分の縦ベクトル $\mathbf{b}$ について、 $(*)$ が整数解をもてば、 $\det A = \pm 1$ である。

解答

1

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 行を用いて第 2, 3, 4 行の第 1 列がゼロになるようにした}) \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\because \text{第 1 列における余因子展開}) \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (15 + 0 + 48) - (40 + 0 - 36) = 59
 \end{aligned}$$

2

$$D_n = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

$|D_n| = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}$ が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

$n = 1$ のとき。 明らかに成り立つ。

$n = 2$ のとき。 明らかに成り立つ。 $\left(\because (\text{左辺}) = (1+x^2)^2 - x^2 = (\text{右辺}) \right)$

$n = k, k + 1$ での与式の成立を仮定すると、 $n = k + 2$ のとき、第 1 列について余因子展開すると、

$$\begin{aligned}
|D_{k+2}| &= (1+x^2) \begin{vmatrix} \overbrace{1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0}^{k+1 \text{ 次}} \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} \overbrace{x & 0 & \cdots & \cdots & 0}^{k+1 \text{ 次}} \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+x^2) |D_{k+1}| - x \left(x \begin{vmatrix} \overbrace{1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0}^{k \text{ 次}} \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} \overbrace{0 & \cdots & \cdots & 0}^{k \text{ 次}} \\ x & 1+x^2 & & \\ & & \ddots & x \\ & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \right) \\
&= (1+x^2) |D_{k+1}| - x^2 |D_k| \\
&= (1+x^2) (1 + \cdots x^{2k+2}) - x^2 (1 + \cdots x^{2k}) \\
&= (1 + \cdots x^{2k+2}) + x^2 \{ (1 + \cdots x^{2k}) + x^{2k+2} \} - x^2 (1 + \cdots x^{2k}) \\
&= 1 + \cdots x^{2k+2} + x^{2k+4}、よって、示された。
\end{aligned}$$

3

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned}
A {}^tA &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha I_4 \text{ (ただし、}\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ } I_4 \text{ は 4 次の単位行列とした。)}
\end{aligned}$$

さて、 A, B を n 次正方行列とすると、一般に

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det A \det B \\
\det A &= \det({}^tA) \\
\det(kA) &= k^n \det A
\end{aligned}$$

が成り立つ。 これらを用いると、

$$\det(A {}^tA) = \det A \det {}^tA = (\det A)^2$$

$$\det(A {}^tA) = \det(\alpha I_4) = \alpha^4 \det I_4 = \alpha^4$$

以上より、

$$\det A = \alpha^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

4

4.1

クラメールの公式より明らか。

…というのは解答としてはあっけなすぎるかもしれないので、少々論じてみる。

$\det A \neq 0$ なので、 A は正則、すなわち、逆行列を持つ。 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ より、 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ とすることができる。 A は正則であるから、 $\mathbf{x}$ がただ 1 組の解になることは明らかなので、 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ の各成分がすべて整数であることを証明すればよい。

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{adj} A) = \pm {}^t(\text{adj} A)$$

であるが、 A の各成分はすべて整数であるので、 A の余因子行列の成分もすべて整数である。よって、 A^{-1} の成分はすべて整数である。 $\mathbf{b}$ の成分もすべて整数であるので、 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ の成分もすべて整数である。よって、示された。

4.2

任意の縦ベクトル $\mathbf{b}$ で (*) が解を持つので、 A は正則、すなわち、逆行列を持つ。よって、(*) は $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ とすることができる。任意の整数成分の縦ベクトル $\mathbf{b}$ について $\mathbf{x}$ は整数解にな

るので、 $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ の各成分も整数である。

したがって、これらをまとめた、 $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}I = A^{-1}$ の各成分も整数である。よって

、 A^{-1} の各成分は整数である。ここで、 $AA^{-1} = I$ であるので、 $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$ である。また、 $\det(AA^{-1}) = \det A \times \det A^{-1} = 1$ であるが、 A, A^{-1} の各成分は全て整数であるから、 $\det A, \det A^{-1}$ は整数である。よって、 $\det A = \pm 1$ でなければならない。