2024 年 7 月 23 日

複素解析期末試験

担当：広恵

1. 次の値を求めよ．

   (a) 2^i

   (b) $\sin(1+i)$

2. 次の極限値を求めよ．

   (a) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$

   (b) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z}$

3. 複素数 $z=x+iy$ に対して複素関数 $f(z)$ の実部を $u(x,y)$，虚部を $v(x,y)$ とおいて

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

   とかく．このとき $u(x,y)$ が次の関数で表されるような正則関数 $f(z)$ を一つ求め，その導関数 $f'(z)$ も計算せよ．ただしそのような正則関数が存在しない場合もある．

$$u(x,y)=x^2-y^2+2y-1$$

4. (a) 次の式で与えられる複素数平面内の曲線を図示せよ．

$$C_1\colon z=\sqrt{3}e^{i\pi t}\ (0\le t\le 1) \qquad C_2\colon z=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}t\ (0\le t\le 1)$$

$$C_3\colon z=i+\frac{1}{2}e^{i\pi t}\ (0\le t\le 2)$$

   (b) 上の曲線 C_1, C_2, C_3 に対し，次の積分を求めよ．

$$\int_{C_j}\frac{1}{z-i}\,dz,\quad j=1,2,3$$

5. 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}\quad (a>0)$$

6. R を正の実数とする．$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ を半円 $|z|\le R$, $\mathrm{Im}(z)>0$ の周に沿って積分し，$R\to\infty$ とすることで，次の積分を計算せよ．

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$$