水曜日 4限 統計学 B1 期末試験 2024 年 7 月 24 日

1. 以下の問に答えよ。

- (1) X は区間 $(0, 1)$ の一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数とする。このとき、 $\mathbb{E}[X^n]$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ を求めよ。
- (2) X は区間 $(0, 1)$ の一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数とし、 $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする。 $g(X)$ がパラメータ 1 の指数分布 $\text{Exp}(1)$ に従う確率変数であるとき関数 g を求めよ。

2. X は正規分布 $N(a, b)$ に従う確率変数とする。ただし $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ である。 $N(a, b)$ の確率密度関数 $p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ は $p(x) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}}}{\sqrt{2\pi b}}$ であることに注意して以下の問に答えよ。

- (1) $a = 0$ のとき、 $\mathbb{E}[X^n]$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ を求めよ。
- (2) $\mathbb{E}[X^2]$ を求めよ。

3. 標準正規分布表を用いて以下の問に答えよ。

- (1) X は正規分布 $N(4, 16)$ に従う確率変数とする。このとき $P(3 < |X - 5|)$ を求めよ。
- (2) 英語の試験の得点分布は平均 70 点、標準偏差 10 点 (分散は $10^2 = 100$ となることに注意) の正規分布にほぼ近い形をしていた。この試験の上位 1% に奨学金を与えたい。奨学金を得るには何点以上必要か?
- (3) ある試験の得点分布は正規分布でよく記述されるとする。60 点以下の割合が全体の約 18.4% で 70 点以下の割合が全体の約 42% であったとする。この時試験の得点の平均を求めよ。

4. X, Y はどちらも $1, 2, \dots, n$ の値を取る離散確率変数であり、同時確率分布 $P(X = j, Y = k)$, $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ は

$$P(X = j, Y = k) = c(j + k)$$

であるとする。このとき以下の問に答えよ。

- (1) 定数 c を求めよ。
- (2) X に関する周辺確率分布を求めよ。
- (3) X と Y の共分散を求めよ。