

微積分学 B2(12) 期末試験 (試験時間 60 分)

途中計算を省略せずに書いてください.

1.

(1) 3次元極座標変換を

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

で定義する. この変換のヤコビ行列とヤコビアンを求めよ.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$\int_D 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\} \quad (a \geq 0)$$

2. 次の積分を計算せよ.

(1)

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1} \, dx \, dy$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ かつ } x, y \geq 0\}$$

(2)

$$\int_D \log(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

3.

(1) $f(x, y) = e^{xy} \cos y$ の $(x, y) = (0, 0)$ での Taylor 展開を 4 次の項まで求めよ.

(2) $f(x, y) = e^{xy} \cos y$ の $(x, y) = (1, \frac{\pi}{2})$ での Taylor 展開を 2 次の項まで求めよ.

但し, 「 $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ での Taylor 展開を k 次の項まで求める」とは
 $f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{m, n} (x - a)^m (y - b)^n$ の $m + n \leq k$ となる部分を求めることである.

4. 函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ の極大・極小値をとる点をすべて求めよ.

以上です.