

微積分学 B1(12) 期末試験

2024 年 7 月 23 日

問 1 (10 点, 解答のみで良い) $s > 0$ に対して $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ と定める.
整数 $n \geq 1$ に対して $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ を求めよ. 必要ならば $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いよ.

問 2 (5 点) $f(x)$ は $[0, 1]$ を含む开区間で連続な関数とする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

が成り立つことを次の様にして示した. 空欄に当てはまる数式・記号を答えよ.

証明 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して $x_k = \frac{k}{n}$ として定まる区間 $[0, 1]$ の分割

$$\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$$

を考える. さらに M_k と m_k をそれぞれ $\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ の上限と下限とし,

$$S(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k, \quad s(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k$$

と定める. このとき, 各 k に対して $m_k \leq (1) \leq M_k$ であるから,

$$(2) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq (3)$$

となる. ここで, $|\Delta_n| = (4)$ だから $n \rightarrow \infty$ のとき $|\Delta_n| \rightarrow 0$ となることに注意せよ.
 $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で積分可能だから, $n \rightarrow \infty$ のとき, $S(f, \Delta_n)$ と $s(f, \Delta_n)$ は共に (5) に収束する. 従って目的の等式が得られる.

問 3 (5 点) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$ を求めよ.

問 4 (10 点) 整数 $m, n \geq 1$ に対して $\int_{-1}^1 (x+1)^m (1-x)^n dx$ を求めよ.

問 5 (10 点, 解答のみで良い) 関数 $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{2x^2}$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の原始関数を求めよ (2) 広義積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ を計算せよ.