

微積分学 B1(12) 期末試験

2023 年 7 月 25 日

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

問 1 (10 点, 解答のみで良い) $s > 0$ に対して $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ と定める.

整数 $n \geq 1$ に対して $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ を求めよ. 必要ならば $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いよ.

$$e^{-x^2} < e^{-\frac{x^2}{2}} < \frac{1}{x} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

問 2 (5 点) $f(x)$ は $[0, 1]$ を含む开区間で連続な関数とする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

が成り立つことを次の様にして示した. 空欄に当てはまる数式・記号を答えよ.

証明 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して $x_k = \frac{k}{n}$ として定まる区間 $[0, 1]$ の分割

$$\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\Delta_n: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$$

を考える. さらに M_k と m_k をそれぞれ $\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ の上限と下限とし,

$$S(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k, \quad s(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k$$

と定める. このとき, 各 k に対して $m_k \leq (1) \leq M_k$ であるから,

$$s(f, \Delta_n) \leq (2) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq (3) \leq S(f, \Delta_n)$$

となる. ここで, $|\Delta_n| = (4)$ だから $n \rightarrow \infty$ のとき $|\Delta_n| \rightarrow 0$ となることに注意せよ. $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で積分可能だから, $n \rightarrow \infty$ のとき, $S(f, \Delta_n)$ と $s(f, \Delta_n)$ は共に (5) に収束する. 従って目的の等式が得られる.

✓ 問 3 (5 点, 理由も述べよ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2kn - k^2}}$ を求めよ. $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2n - \frac{k^2}{n}}}$

問 4 (10 点, 理由も述べよ) 整数 $m, n \geq 1$ に対して $\int_1^2 (x-1)^m (2-x)^n dx$ を求めよ.

問 5 (10 点, 解答のみで良い) 次の広義積分を計算せよ.

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}} dx \quad (a, b > 0) \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$$

注意事項

- 解答用紙に学生証番号と氏名を忘れずに記入する。氏名にはふりがなをふる。
- 試験時間は1時間。解答が早く終了した場合には、解答用紙を提出し、教室から退出しても良い。
- 解答用紙の裏に書いても良い。解答用紙の追加は認めない。
- 問3と問4は解答に至る過程を簡潔に述べ、解答には下線を引く事（解答のみでは満点にならない）。問1と問5は解答のみで良い。
- 講義中（レポート課題も含む）に扱った定理や命題は全て証明無しで用いて良い。