

テスト (線型代数 B2)

問 1. 次の定義を述べよ.

- (1) ベクトル a_1, a_2, a_3 が $\mathbb{C}$ 上線型独立
- (2) V, W を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とすると、 V から W への線型写像 f

問 2. $\mathbb{R}^3$ において、次の基底に Gram-Schmidt の直交化法を用いて、与えられた内積に対して正規直交基底を求めよ。(答えのみでよい) (1) 自然内積 (2) $a \cdot b = \sum_{i=1}^3 i a_i b_i$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

問 3. 次の行列 A, B に対し問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる、 P^{-1} を求めよ。(答えのみでよい)
- (2) B を対角化せよ。(答えのみでよい)

問 4. 次の文中の空欄を埋めよ.

$M_3(\mathbb{C})$ を考える. これは $\mathbb{R}$ 上の線型空間としての次元は A であり, $\mathbb{C}$ 上の線型空間としての次元は B である. このように集合に構造を入れて考えるとき, その構造の入れ方によって, 同じ集合でも異なる構造をもつものが得られる. ベクトルや行列の成す集合以外にも線型空間の例は無数にある. 例えば $\mathbb{R}$ に係数を持つ x, y, z の多項式全体を考えると, 通常の加法と実数倍で線型空間になる. この線型空間の斉次多項式全体は部分空間になる. 例えば次数 6 の斉次多項式全体は次元が C の部分空間である.

問 5. V を $\mathbb{C}$ 上の線型空間とし, その基底を a, b, c とする. このとき, V 上の線型変換 f を $f(a) = a - b$, $f(b) = b - a$, $f(c) = a + b + c$ とする.

- (1) f の固有値を求めよ (f に対応する行列のという意味).
- (2) (1) で求めた固有値に対応する固有空間の基底を求めよ.