テスト（線型代数B2）

問 1. 次の定義を述べよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が $\mathbb{R}$ 上線型独立 (2)V, W を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とするとき，V から W への線型写像

問 2. $\mathbb{R}^4$ に対して，次のベクトルに Gram-Schmidt の直交化法を用いて正規直交基底を求めよ．ただし内積は自然内積とする（答えのみでよい）．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

化

問 3. 次の行列 A, B に対し対角可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

問 4. (1) 次の文中の空欄を埋めよ．

$M_2(\mathbb{C})$ を考える．これは $\mathbb{R}$ 上の線型空間としての次元は $\boxed{\text{A}}$ であり，$\mathbb{C}$ 上の線型空間としての次元は $\boxed{\text{B}}$ である．このように集合に構造を入れて考えるとき，その構造の入れ方によって，同じ集合でも異なる構造をもつものが得られる．ベクトルや行列の成す集合以外にも線型空間の例は無数にある．例えば $\mathbb{R}$ に係数を持つ x, y, z の多項式全体を考えると，通常の加法と実数倍で線型空間になる．この線型空間の次数が等しいもの全体は部分空間になる．例えば次数 4 の多項式全体は次元が $\boxed{\text{C}}$ の部分空間である．

(2) $M_2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とみたとき，トレースは $\mathbb{R}$ への線型写像になっている．この線型写像が全射であること，およびこの線型写像の核の基底を一つ求めよ（基底になっていることを示すことが必須）．

問 5. 『選択問題：次の (1),(2) のいずれか一つを選び答えよ．複数解答は採点対象外とするので注意！』

(1) 線型写像 $f : V \to W$ に対し f が単射であることと，$\mathrm{Ker} f = \{0\}$ は必要十分であることを示せ．

(2) 一般に二つの写像が与えられたとき，それらの合成写像 $g \circ f$ を考えることができる．すなわち $f : A \to B$，$g : B \to C$ に対し $g \circ f : A \to C$ を $g \circ f(x) = g(f(x))$ と定義する．n 個の線型写像の合成写像は線型写像になることを示せ．