

テスト (線型代数 B1)

問 1. 次の用語の定義を述べよ.

(1) 正則行列 (2) 零因子

問 2. n は m より大きい自然数とする. 任意の $A \in M(m, n; \mathbb{R})$ に対し tAA は正則とならないことを示せ.

問 3. (1) 次の行列 A の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 逆行列は存在すれば一意であることを示せ.

問 4. 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{pmatrix}$$

問 5. $A \in M_n(\mathbb{Z})$ がべき零行列で, $A^m = O$ とする. このとき,

$$\det(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) = \pm 1$$

を示せ.