数学Ⅱ　第３回定期試験　　08/10/01

第１問　２点 A(3 , －4) , B(－2 , 6)について、以下の各問に答えよ。

問１　線分 AB を 3 : 2 に内分する点の座標

問２　線分 AB を 7 : 2 に外分する点の座標

問３　線分 AB を一辺とする正方形の面積(単位は不要)

問４　２点 A,B を通る直線の傾きと y 切片

問５　２点 A,B を通る直線が x 軸と交わる点の座標

問６　原点を通って、直線 AB に平行な直線の方程式

問７　原点を通って、直線 AB に垂直な直線の方程式

第２問　以下の各問に答えなさい。

問１　３点 A(1 , 7)、B(3 , 6)、C(a , 4)が一直線上にあるように

定数 a の値を求めなさい。

問２　２点 O(0 , 0)、A(－4 , 8)を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式

を求めなさい。

問３　次のような三角形は、どのような三角形になるか。

３点 $P(1,\sqrt{3})$、$Q(-3,\sqrt{3})$、$R(-1,-\sqrt{3})$を頂点とする△PQR

問４　座標平面上に２点 A(2,4)、B(5,3)がある。点 P を y 軸上

に AP＝BP となるようにとるとき、点 P の座標を求めよ。

問 5　3 点 A(5 , 4)、B(－2, 3)、C(3 ,－1)を 3 つの頂点とする

平行四辺形 ABCD がある。頂点 D の座標を求めなさい。

ただし、点 D は、x 軸上にあるものとする。

問 6　2 直線 $y=-3x+4$, $y=-3x+8$ の間の距離を求めなさい。

第 3 問　⊿ABC の辺 B を 1 : 3 に内分する点 D をとる。このとき、

$3AB^2+AC^2=4(3BD^2+AD^2)$が成り立つことを示せ。

証明　直線 BC を x 軸上にとり、点 B(－c,0)とすれば、点 C は、

C($\boxed{ア}$c , 0)とおくことができる。このとき、点 D の座標

は、D($\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$)となる。また、点 A の座標は、

A(a , b)とおくことにする。そうすると、

$AB^2=a^2+b^2+c^2+\boxed{エ}ac$

$AC^2=a^2+b^2+\boxed{オ}c^2-\boxed{カ}ac$

$AD^2=a^2+b^2$

$BD^2=-c^2$

したがって、

$3AB^2+AC^2=3(a^2+b^2+c^2+\boxed{エ}ac)+a^2+b^2+\boxed{オ}c^2-\boxed{カ}ac$

$=\boxed{キ}a^2+\boxed{ク}b^2+\boxed{ケ}c^2$

一方、$4(3BD^2+AD^2)=4\{3(-c^2)+a^2+b^2\}$

$=\boxed{キ}a^2+\boxed{ク}b^2+\boxed{ケ}c^2$

ゆえに、$3AB^2+AC^2=4(3BD^2+AD^2)$　は、成り立つ。

第 4 問　直線 $m: 2x - 3y - 10 = 0$ と 2 点 A(1 , 6) , B(7 , 10)について

以下の各問に答えよ。

問 1　点 A を通って、直線 m に垂直な直線の方程式 n

問 2　直線 m と直線 n の交点 C の座標

問 3　点 C に関して、点 A と対称な点 E の座標

問 4　直線 m 上に点 D をとり、線分 AD と DB の長さの和が最小になるようにしたい。点 D を直線 m 上のどこにとればよいかを次のように考えた。空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ を数字で埋めなさい。

解　BE を結ぶ線分は、直線　$y = -\boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}}$ である。

AD＋DB を最小にする点は、BE と直線 m との交点である。

よって、D($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$)

第 5 問　次の空欄$\boxed{ア}$～$\boxed{キ}$に適切な数字を入れなさい。

直線$(2k-1)x+(k+3)y=k+10$は、定数 k がどのような値をとってもある定点を通る。k について、整理すると、

$(-x+\boxed{ア}\,y-\boxed{イ})+(\boxed{ウ}\,x+y-\boxed{エ})k=0$

これを①式とおく。この①式が k についての恒等式であるのは、

$-x+\boxed{ア}\,y-\boxed{イ}=\boxed{オ}$

$\boxed{ウ}\,x+y-\boxed{エ}=\boxed{オ}$

が同時に成り立つときである。すなわち、①が表す直線は、定数 k の値によらず、2 直線の交点を通ることになるから、求める定点の座標は、$(\ -\boxed{カ}\ ,\ \boxed{キ}\ )$である。

第 6 問　3 直線 L1 : $x-3y+5=0$, L2 : $4x+3y+5=0$, L3 : $2x-y-5=0$ で囲まれる三角形がある。L1 と L2 との交点を A、L2 と L3 との交点を B、L3 と L1 との交点を C とする。また、A から BC に下ろした垂線との交点を H とおく。以下の各問に答えなさい。

問 1　交点 A,B,C を求めなさい。

問 2　BC の長さを求めなさい。

問 3　直線 BC の方程式を求めなさい。

問 4　AH の長さを求めなさい。

問 5　⊿ABC の面積 S を求めなさい。(単位は不要)

解答　数学Ⅱ　第3回定期試験　　08/10/01

第１問　2 点 A(3 , －4) , B(－2 , 6)について、以下の各問に答えよ。

問１　線分 AB を 3 : 2 に内分する点の座標　(0,2)

問２　線分 AB を 7 : 2 に外分する点の座標　(－4,10)

問３　線分 AB を一辺とする正方形の面積(単位はなくてよい)　125

問４　2 点 A,B を通る直線の傾きと y 切片　傾き－2　y 切片 2

問５　2 点 A,B を通る直線が x 軸と交わる点の座標　(1,0)

問６　原点を通って、直線 AB に平行な直線の方程式　y＝－2x

問７　原点を通って、直線ABに垂直な直線の方程式　$y=\frac{1}{2}x$

第２問　以下の各問に答えなさい。

問１　3 点 A(1 , 7)、B(3 , 6)、C(a , 4)が一直線上にあるように

定数 a の値を求めなさい。

ABの方程式は、$y-7=\dfrac{6-7}{3-1}(x-1)$

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)+7$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$$

この式が点Cを通る。

$$4=-\frac{1}{2}a+\frac{15}{2}$$

$$-a=8-15$$

$$a=7$$

問２　２点 O(0 , 0)、A(　－4 , 8)を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式

を求めなさい。

OAの方程式は、$y=-2x$

求める直線の方程式mの傾きは、$\frac{1}{2}$

OAの中点は、$\left(\frac{-4}{2},\frac{8}{2}\right)=(-2,4)$

よって、直線mは、$y-4=\frac{1}{2}(x+2)$

$y=\frac{1}{2}x+5$

問３　次のような三角形は、どのような三角形になるか。

３点P(1,$\sqrt{3}$)、Q(－3,$\sqrt{3}$)、R(－1,－$\sqrt{3}$)を頂点とする⊿PQR

正三角形

問４　座標平面上に２点 A(2,4)、B(5,3)がある。点 P を y 軸上

に AP＝BP となるようにとるとき、点 P の座標を求めよ。

$P(0,y)$とおく。

$AP^2=(0-2)^2+(y-4)^2=4+y^2-8y+16=y^2-8y+20$

$BP^2=(0-5)^2+(y-3)^2=25+y^2-6y+9=y^2-6y+34$

$AP=BP$より、$AP^2=BP^2$

$-8y+20=-6y+34$

$-2y=14$

$y=-7$

$P(0,-7)$

問５　３点 A(5 , 4)、B(－2, 3)、C(3 ,－1)を３つの頂点とする

平行四辺形 ABCD がある。頂点 D の座標を求めなさい。

ただし、点 D は、x 軸上にあるものとする。

Dの座標を$(x,0)$とおく。

ACの中点　$\left(\frac{5+3}{2},\frac{4-1}{2}\right)=\left(\frac{8}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(4,\frac{3}{2}\right)$

BDの中点　$\left(\frac{-2+x}{2},\frac{3+0}{2}\right)=\left(4,\frac{3}{2}\right)$

$-2+x=8$

$x=10$　　　　　　　　$D(10,0)$

問６　２直線 y＝－3x＋4 , y＝－3x＋8 の間の距離を求めなさい。

$3x+y-4=0$

$y=-3x+8$上の点$(0,8)$との距離を求める。

$$d=\frac{|3\times 0+1\times 8+(-4)|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|4|}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

第 3 問　⊿ABC の辺 B を 1 : 3 に内分する点 D をとる。このとき、

$$3AB^2 + AC^2 = 4(3BD^2 + AD^2)$$

が成り立つことを証明しなさい。

証明　直線 BC を *x* 軸上にとり、点 B(−c,0)とすれば、点 C は、

C($\boxed{\text{ア}}$ c , 0)とおくことができる。このとき、点 D の座標

は、D($\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$)となる。また、点 A の座標は、

A(a､b)とおくことにする。そうすると、

$AB^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \boxed{\text{エ}}ac$

$AC^2 = a^2 + b^2 + \boxed{\text{オ}}c^2 - \boxed{\text{カ}}ac$

$AD^2 = a^2 + b^2$

$BD^2 = -c^2$

したがって、

$3AB^2 + AC^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2 + \boxed{\text{エ}}ac) + a^2 + b^2 + \boxed{\text{オ}}c^2 - \boxed{\text{カ}}ac$

$= \boxed{\text{キ}}a^2 + \boxed{\text{ク}}b^2 + \boxed{\text{ケ}}c^2$

一方、$4(3BD^2 + AD^2) = 4\{3(-c^2) + a^2 + b^2\}$

$= \boxed{\text{キ}}a^2 + \boxed{\text{ク}}b^2 + \boxed{\text{ケ}}c^2$

ゆえに、$3AB^2 + AC^2 = 4(3BD^2 + AD^2)$　は、成り立つ。

ア　3　イ　0　ウ　0　エ　2　オ　9

カ　6　キ　4　ク　4　ケ　12

第４問　直線 m：$2x-3y-10=0$ と２点 A(1 , 6) , B(7 , 10)について

以下の各問に答えよ。

問１　点 A を通って、直線 m に垂直な直線の方程式 n

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$$

直線mの傾きは,$-\frac{3}{2}$

$$y=-\frac{3}{2}(x-1)+6=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$$

問２　直線 m と直線 n の交点 C の座標

$$\begin{cases}2x-3y-10=0\\3x+2y-15=0\end{cases}\quad\begin{cases}4x-6y-20=0\\9x+6y-45=0\end{cases}$$

$$13x=65$$

$$x=5, y=0$$

$$C(5,0)$$

問３　点 C に関して、点 A と対称な点 E の座標

点Cは、AEの中点。$E(x,y)$とおく。

$$5=\frac{x+1}{2}\quad x=9\quad 0=\frac{y+6}{2}\quad y=-6$$

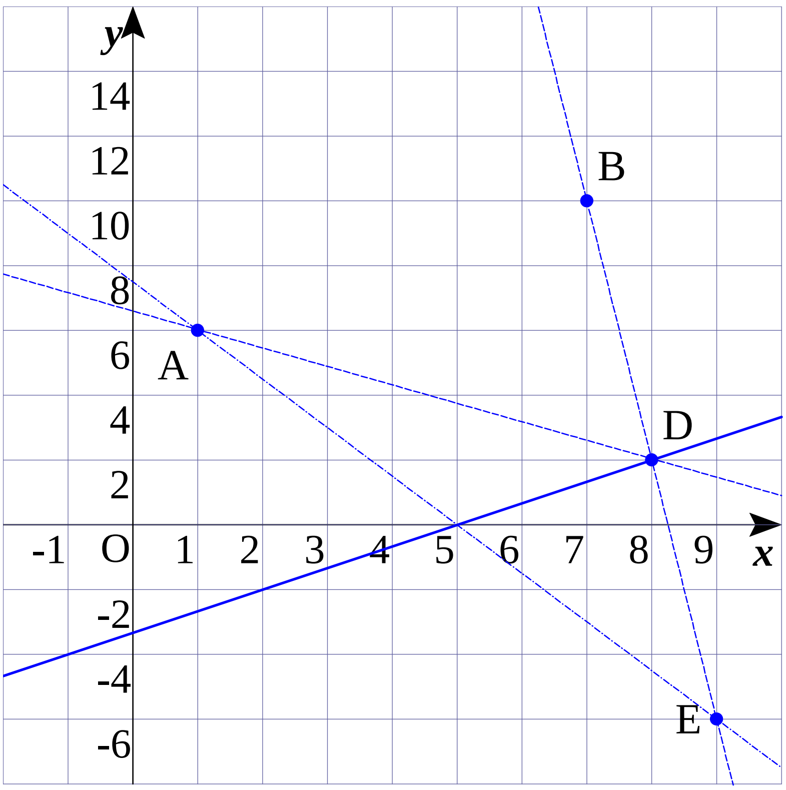
$$E(9,-6)$$

問 4　直線 m 上に点 D をとり、線分 AD と DB の長さの和が最小になるようにしたい。点 D を直線 m 上のどこにとればよいかを次のように考えた。空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ を数字で埋めなさい。

解　BE を結ぶ線分は、直線　$y=-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}$ である。

AD＋DB を最小にする点は、BE と直線 m との交点である。

よって、D($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$)　　ア　8　イ　66　ウ　8　エ　2



第 5 問　次の空欄 $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{キ}$ に適切な数字を入れなさい。

直線$(2k-1)x+(k+3)y=k+10$ は、定数 k がどのような

値をとってもある定点を通る。k について、整理すると、

$(-x+\boxed{ア}y-\boxed{イ})+(\boxed{ウ}x+y-\boxed{エ})k=0$

これを①式とおく。この①式が k についての恒等式であるのは、

$-x+\boxed{ア}y-\boxed{イ}=\boxed{オ}$

$\boxed{ウ}x+y-\boxed{エ}=\boxed{オ}$

が同時に成り立つときである。すなわち、①が表す直線は、定数

k の値によらず、2 直線の交点を通ることになるから、求める定点

の座標は、($-\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$)である。

ア　3　イ　10　ウ　2　エ　1　オ　0　カ　1　キ　3

第 6 問　3 直線 L1：x－3y＋5＝0 , L2：4x＋3y＋5＝0 ,

L3：2x－y－5＝0 で囲まれる三角形がある。L1 と L2 との

交点を A、L2 と L3 との交点を B、L3 と L1 との交点を C

とする。また、A から BC に下ろした垂線との交点を H と

おく。以下の各問に答えなさい。

問 1　交点 A,B,C を求めなさい。

$L1: x=3y-5$ より ,$4(3y-5)+3y+5=0$

$12y+3y-20+5=0$

$15y=15$

$y=1$　　よって、$x=3\times1-5=-2$　　$A(-2,1)$

$L3: y = 2x - 5$ より、$4x + 3(2x - 5) + 5 = 0$

$4x + 6x - 15 + 5 = 0$

$10x = 10$

$x = 1$　　よって、$y = 2 \times 1 - 5 = -3$　　$B(1, -3)$

$L1: x = 3y - 5$ より、$2(3y - 5) - y - 5 = 0$

$6y - y - 10 - 5 = 0$

$5y = 15$

$y = 3$　　よって、$x = 3 \times 3 - 5 = 4$　　$C(4, 3)$

問 2　BC の長さを求めなさい。

$$BC = \sqrt{(4-1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

問 3　直線 BC の方程式を求めなさい。

$$y - 3 = \frac{3+3}{4-1}(x - 4)$$

$y - 3 = 2(x - 4)$

$y = 2x - 8 + 3 = 2x - 5$　　$2x - y - 5 = 0$

問 4　AH の長さを求めなさい。

$A(-2, 1)$ と $2x - y - 5 = 0$ との距離なので、

$$AH = \frac{|2 \times (-2) + 1 \times (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

問 5　⊿ABC の面積 S を求めなさい。

$$S = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = 15$$

没問題

3 点 A(－1, 4)、B(－3,－1)、C(0 , 1)を頂点とする⊿ABC

がある。以下の各問に答えよ。

問 1　辺 BC の長さを求めなさい。

$$BC = \sqrt{(0+3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

問 2　直線 BC の方程式を求めなさい。

$$y - 1 = \frac{-1-1}{-3-0}(x-0)$$

$$y = \frac{2}{3}x + 1 \quad 2x - 3y + 3 = 0$$

問 3　点 A と直線 BC との距離 d を求めなさい。

$$d = \frac{|(-1)\times 2 + 4\times(-3) + 3|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-2-12+3|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$

問 4　⊿ABC 面積 S を求めなさい。(単位はなくてよい)

$$S = \sqrt{13} \times \frac{11}{\sqrt{13}} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$