

数学 B(数学Ⅱ) 第2回定期試験

3年2組 _____番 氏名_____点

第1問 次の整式 A を整式 B で割り、商と余りを求めなさい。

(1) $A = x^3 - 4x^2 - 7x + 10, B = x - 1$ (2) $A = x^3 - 5x + 6, B = x - 2$

第2問 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + k$ を $x + 3$ で割った余りが 8 になるように定数 k の値を求めなさい。

第3問 $f(x)$ を $x - 1$ で割った余りは 5、 $x + 3$ で割った余りは -7 である。 $f(x)$ を $(x - 1)(x + 3)$ で割った余りを求めなさい。

第4問 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

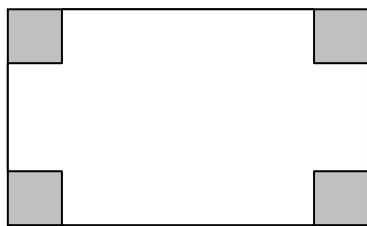
(2) $x^3 - 3x^2 + 4$

第5問 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$

(2) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$

第6問 縦8cm、横10cmの長方形の厚紙の4隅から正方形を切り



落とし、直方体の箱をつくる。容積を 48cm^3 にするには、切り落とす1辺の長さを何 cm にすればよいか。

第7問 次の計算をなさい。

$$(1) \quad \frac{6a^2x}{2ax^2}$$

$$(2) \quad \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 12}$$

$$(3) \quad (x+1) \times \frac{x-2}{x^2+x}$$

$$(4) \quad \frac{x^2-9}{(x+2)} \div (2x^2-5x-3)$$

$$(5) \quad \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}$$

$$(6) \quad \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+4}{x^2-x-2}$$

第8問 $a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 3x^2 - 5x + 4$ が x についての恒等式になるように a, b, c の値を求めなさい。

第9問 等式 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ が成り立つことを証明しなさい。

第10問 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ が成り立つことを証明しなさい。

第11問 $x^2 + x + 1 > 0$ となることを証明しなさい。

第12問 $a > 0$ のとき、 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ が成り立つことを証明しなさい。

数学 B(数学Ⅱ) 第2回定期試験 模範解答

3年2組 _____番 氏名_____点

第1問 次の整式 A を整式 B で割り、商と余りを求めなさい。

(1) $A = x^3 - 4x^2 - 7x + 10, B = x - 1$ (2) $A = x^3 - 5x + 6, B = x - 2$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 10 \\ x-1 \overline{) x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -3x^2 - 7x + 10 \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -10x + 10 \\ \underline{-10x + 10} \\ 0 \end{array}$$

商 $x^2 - 3x - 10$
余り 0

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 1 \\ x-2 \overline{) x^3 + 6} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 2x^2 - 5x + 6 \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ -x + 6 \\ \underline{-x + 2} \\ 4 \end{array}$$

商 $x^2 + 2x - 1$
余り 4

第2問 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + k$ を $x+3$ で割った余りが 8 になるように定数 k の値を求めなさい。

$$f(-3) = -27 + 36 + 15 + k = k + 24$$

$$k + 24 = 8$$

$$k = -16$$

第3問 $f(x)$ を $x-1$ で割った余りは5、 $x+3$ で割った余りは -7 で

ある。 $f(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割った余りを求めなさい。

2次式で割った余りは、 $ax+b$ とおける。

$$f(x) = (x-1)(x+3)Q(x) + ax + b$$

$$f(1) = a + b = 5$$

$$f(-3) = -3a + b = -7$$

$$4a = 12$$

$$a = 3$$

$$b = 5 - a = 5 - 3 = 2$$

余りは、 $3x+2$

第4問 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

(2) $x^3 - 3x^2 + 4$

$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

$$P(-1) = -1 - 3 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 6 \\ x-1 \overline{) x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -5x^2 + 11x - 6 \\ \underline{-5x^2 + 5x} \\ 6x - 6 \\ \underline{6x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 4 \\ x+1 \overline{) x^3 - 3x^2 + 4} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -4x^2 - 6 \\ \underline{-4x^2 - 4x} \\ 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x-1)(x-2)^2$$

第5問 次の方程式を解きなさい。

$$(1) \quad x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$P(2) = 8 - 12 + 8 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ x-2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 4x - 4} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -x^2 + 4x - 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ 2x - 4 \\ \underline{2x - 4} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2 - x + 2)$$

$$x = 2, \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$(2) \quad x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$$

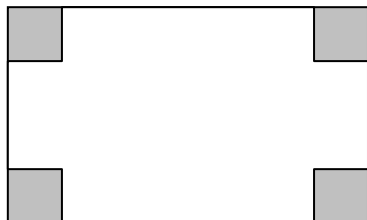
$$P(-3) = -27 + 81 - 81 + 27 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 9 \\ x+3 \overline{) x^3 + 9x^2 + 27x + 27} \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ 6x^2 + 27x + 27 \\ \underline{6x^2 + 18x} \\ 9x + 27 \\ \underline{9x + 27} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+3)(x^2 + 6x + 9)$$

$$= (x+3)^3 \quad x = -3$$

第6問 縦8cm、横10cmの長方形の厚紙の4隅から正方形を切り



落とし、直方体の箱をつくる。容積を 48cm^3

にするには、切り落とす1辺の長さを何 cm

にすればよいか。

切り落とす正方形の1辺の長さ・・・ x

直方体の縦の長さ・・・ $(8-2x)$ 直方体の横の長さ・・・ $(10-2x)$

$x > 0, 8-2x > 0, 10-2x > 0$ より、 $0 < x < 4$ ・・・①

$$x \times (8-2x) \times (10-2x) = 48$$

$$4x^3 - 36x^2 + 80x - 48 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$f(1) = 1 - 9 + 20 - 12 = 0$$

$$f(2) = 8 - 36 + 40 - 12 = 0$$

$$f(6) = 216 - 324 + 120 - 12 = 0$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-6)$$

$x = 1, 2, 6$ しかし、 $x = 6$ は、①を満たさない。

よって、求める答えは 1cm または、 2cm

第7問 次の計算をなさい。

$$(1) \quad \frac{6a^2x}{2ax^2}$$

$$\frac{6a^2x}{2ax^2} = \frac{3a}{x}$$

$$(2) \quad \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 12}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 12} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x-4)(x+3)} = \frac{x+1}{x-4}$$

$$(3) \quad (x+1) \times \frac{x-2}{x^2+x}$$

$$\begin{aligned} (x+1) \times \frac{x-2}{x^2+x} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{x(x+1)} \\ &= \frac{x-2}{x} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{x^2-9}{(x+2)} \div (2x^2-5x-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-9}{(x+2)} \times \frac{1}{(2x^2-5x-3)} \\ &= \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)} \times \frac{1}{(2x+1)(x-3)} \\ &= \frac{(x+3)}{(2x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \times (x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{1 \times (x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{2x+2+x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{3x}{(x-2)(x+1)} \end{aligned}$$

$$(6) \quad \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+4}{x^2-x-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+4}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} - \frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2+x-6-x^2-3x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{-2x-2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{-2(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{-2}{(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

第8問 $a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 3x^2 - 5x + 4$ が x についての恒等式

になるように a, b, c の値を求めなさい。

$$\begin{aligned} & a(x+1)^2 + b(x+1) + c \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c \\ &= ax^2 + (2a+b)x + a+b+c \\ &= 3x^2 - 5x + 4 \\ &a=3, 2a+b=-5, a+b+c=4 \\ &a=3 \\ &b=-5-2a=-5-6=-11 \\ &c=4-a-b=4-3+11=12 \end{aligned}$$

第9問 等式 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ が成り立つ

ことを証明しなさい。

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ &= (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

よって、左辺＝右辺なので、この等式は、成り立つ。

第10問 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ が成り立つことを証明しなさい。

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと、 } a = bk, c = dk \text{ とおける。}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \text{ より、}$$

$$\text{左辺} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{b(k+1)}{b(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\text{右辺} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{d(k+1)}{d(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}$$

よって、左辺＝右辺

従って、この等式は、成り立つ。

第 11 問 $x^2 + x + 1 > 0$ となることを証明しなさい。

$x^2 + x + 1$ を平方完成すると、

$$x^2 + x + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \text{ より } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

よって、 $x^2 + x + 1 > 0$ の不等式は、成り立つ。

第 12 問 $a > 0$ のとき、 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ が成り立つことを証明しなさい。

$$\text{相加・相乗平均より、} \frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \times \frac{1}{a}}$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{1} = 2$$

よって、 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ は、成り立つ。

等号が成り立つのは、 $a = 1$ または、 $\frac{1}{a}$ のときに限る。