CounterExample in Topology 第 3 回 (2012/3/12)

CounterExamples: **(Finite, Countable, Uncountable) Particular Point Topology, Sierpinski Topology, Closed Extension Topology**

X を集合，$p \in X$ をある点とする．Particular Point Topology とは

$$A \text{ が開集合} \overset{def}{\Longleftrightarrow} p \in A \text{ または } A = \emptyset$$

という位相を X に入れたものである．X の濃度に応じて Finite, Countable, Uncountable Particular Topology と言われる．まず開集合の公理系を満たすことを確認する．この定義による開集合系を $\mathcal{O}$ とする．$\emptyset, X \in \mathcal{O}$ は定義より明らか．$A_1, A_2 \in \mathcal{O}$ とする．A_1 または A_2 が空集合ならば $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \mathcal{O}$．どちらも空でないときは $p \in A_1 \cap A_2$ より $A_1 \cap A_1 \in \mathcal{O}$．いずれにしても $\mathcal{O}$ は有限個の積で閉じている．$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{O}$ とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda = \emptyset$ ならば $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset \in \mathcal{O}$．ある $\lambda_0 \in \Lambda$ で $p \in A_{\lambda_0}$ ならば $p \in A_{\lambda_0} \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$．いずれにしても $\mathcal{O}$ は非可算和で閉じている．以上より開集合系の公理を満たしている．

1．$\{a_i\}$ を収束列，a をその収束先とし，$a_i \neq p$ とする．このときある番号 $N \in \mathbf{N}$ が存在して $n > N \Longrightarrow a_n = a$ が成り立つ．また $\{a, p\}$ は a の近傍であるから，$a_n \longrightarrow a$ という仮定からある番号 N があって $n > N \Longrightarrow a_n \in \{a, p\}$．よって $n > N \Longrightarrow a_n \neq p$ かつ $a_n \in \{a, p\}$，つまり $a_n = p$.

また点列に対する集積点は，その点列の点で無限個の点列の点と等しいものだけである．なぜならば従って例えば $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$ とすると，この点列に対して集積点は存在しない.

2．p 以外の任意の点 $x \in X$ は $\{p\}$ の limit point である．なぜならば x の任意の近傍は p を含むからである．よって空で無い開集合の閉包は X となる ($\because p$ をふくむから)．また X ではない閉集合は p を含まない．なぜならば補集合は開集合で p を含むからである．よって X でない閉集合の内部は空集合である.

3．

4．Particular Point Topology は T_0 空間である．なぜならば X が一点集合でない時は相異なる二点 a, b がとれる．どちらも p でないときは $\{a, p\}$ は b を含まない．またどちらか一方が p のときは $\{p\}$ が p の近傍でもう一方を含まない．任意の空でない開集合は p をふくむから T_j $(j = 1, 2, 2\frac{1}{2})$ 空間ではない．X が一点集合のときは離散位相と一致するから T_j $(j = 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5)$ 空間である.

5．$A = \{p\}$ は明らかにコンパクト集合．しかし $\bar{A} = X$ となり X が無限集合の時は $\bar{A}$ はコンパクトでなくなる．任意の点 $x \in X$ に対して $\{x, p\}$ はコンパクトな近傍であるから X は局所コンパクト．ところが p を含む任意の集合の閉包は X で，X が無限集合の時 X はコンパクトではないから strongly locally compact ではない．また X が非可算無限集合であるとき X は Lindeloef 空間ではない．実際 $\{\{x, p\}_{x\in X}\}$ は X の開被覆であるが可算部分被覆は存在しない (存在すれば X は可算集合).

6．$\overline{\{p\}} = X$ より X は可分．X を非可算集合とすると部分空間 $X \setminus \{p\}$ は過分でない．実際 $\{x, p\}$ は X の開集合であるから $\{x\}$ は $X \setminus \{p\}$ の開集合 (離散位相と同値).

7．p の任意の近傍は $\{p\}$ を包み，x $(\neq p)$ の任意の近傍は $\{x, p\}$ を包むから X は第 1 可算公理を満たす．ところが X が非可算集合のとき X は第 2 可算公理を満たさない．実際第 2 可算公理をみたすならば部分空間である $X \setminus \{p\}$ も第 2 可算公理を満たすが，この部分空間は離散空間であるから矛盾.

8．X をある集合とする．τ_1 を p を含む X の部分集合の全体とする．また τ_2 を q $(q \neq p,\ |X| \geq 2)$ を含む X

の部分集合の全体とする．このとき (X,τ_1) と (X,τ_2) は同相である．なぜならば $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(X,\tau_2)$ を

$$f(x)=\begin{cases} x & (\text{if } x\neq p,q) \\ p & (\text{if } x=q) \\ q & (\text{if } x=p) \end{cases}$$

とすると明らかに f は全単射．また (X,τ_2) の開集合を $O\ (\neq\emptyset)$ とすると $O=\cup_{x\in O,x\neq q}\{x,q\}\cup\{q\}$ で $f^{-1}(\{x,q\})=\{x,p\}$ if $(x\neq p)$，$f^{-1}(\{p,q\})=\{p,q\}$ で，$f^{-1}(\{q\})=\{p\}$ であるから f は連続 (空集合の逆像は空)．同様に f^{-1} も連続．よって f は同相写像．ただし $\tau_1\subset\tau_2$ でも $\tau_2\subset\tau_1$ でもないから (包含関係の順序の意味で) 比較可能ではない．

９．

１０．任意の空でない開集合は p をふくむから X は hyperconnected．しかし $|X|\geq 3$ ならば X は ultra connected ではない．なぜならば p 以外の二点はそれぞれ一点集合とみたとき閉集合で共通部分は空であるからである．

１１．$X\setminus\{p\}$ は離散空間で totally disconnected(一点が連結成分) であるから p は dispersion point である．

１２．p を含まない任意の集合は limit point を持たないから X は weakly countably compact ではない．実際 p を含まない任意の集合 A，X の任意の点点 a に対して $\{a,p\}$ を考えると，これと A との共通部分は $a\in A\Longrightarrow A\cap\{a,p\}=\{a\}$，$a\notin A\Longrightarrow A\cap\{a,p\}=\emptyset$ であるあから A の limit point は存在しない．X の上の実数値連続関数で定数関数以外のものは存在しないことを示す．存在すると仮定する．f は定数ではないとしたから $f(X)$ の濃度は 2 以上である．$f(X)$ の相異なる 2 点 a,b をとる．$a<b$ として良い．このとき $O_1=f^{-1}((-\infty,a))$，$O_2=f^{-1}((b,\infty))$ は共に X の空でない開集合であるから $p\in O_1\cap O_2$．これは $f(p)<a$ かつ $f(p)>b$ を意味し，$a<b$ より矛盾．よって X の上の実数値連続関数は定数関数に限る．これより X は pseudocompact である．

１３．X は弧状連結かつ局所弧状連結である．なぜならば任意の X の点 q に対して，$f:[0,1]\longrightarrow X$ を $f(1)=q, f([0,1))=p$ とすれば X の開集合は p だけを含むか，p,q のどちらも含むかの場合しか存在しないので f は連続．よって X は弧状連結．更にこれから $\{q,p\}$ は弧状連結でこれは q の基本近傍系であるから X は局所弧状連結である．しかし X は arc connected ではない．なぜならば X の開集合 $\{p\}$ の同相写像 $h:[0,1]\longrightarrow X$ による逆像を考えると，これは $[0,1]$ の一点集合で開集合ではない．

１４．X は第 1 類ではない．なぜならばもし X が第 1 類であるとすると，ある疎 (nowhere dense) な集合で p を含むものが存在する．この集合の閉包をとったものは X となるから，これは疎であることに矛盾．

１５．X は局所コンパクトである．実際 X の任意の点 x に対して $\{x,p\}$ ($x=p$ のときは $\{p\}$) はコンパクトである．しかし X が無限集合であるとすると強局所コンパクトではない．なぜならば p を含む集合の閉包をとったものは X となり，X が無限集合の場合は X はコンパクトではないからである．

１６．X が有限集合であるときはコンパクトである (どんな位相を入れたとしても有限集合ならばコンパクトである)．X が無限集合のときはメタコンパクトではない．よってパラコンパクトでもない．なぜならば $\{x,p\}_{x\in X,x\neq p}$ は X の開被覆であるが，これに対する局所有限な細分は存在しない．なぜならば p の任意の近傍に対してこの開被覆と交わりが空でないものは X の濃度と同じだけ存在する．

１７．(**Sierpinski Space**) X として特に $X=\{0,1\}$，$p=0$ としたものを Sierpinski Space という．この空間の開集合は $\emptyset,X,\{0\}$ だけであるから，$0,1,0,1,\cdots$ という列を考えると 0 は accumulation point であり 1 は limit point である．

１８．Sierpinski Space は hyperconnected, ultraconnected, path connected である．$|X| = 2 < 3$ より ultraconnected であり，それ以外は particular point topology の一般的議論から従う．しかし X は有限集合であるから arc connected ではない．また X は T_4, T_5 である．なぜならば互いに素な閉集合は存在しないからである．

１９．(X, τ) を可算集合に離散位相を入れた空間とする．この空間は paracompact である．$Y = \{0, 1\}$ を Sierpinski とし 0 を開集合とする．Y はコンパクトである．このとき $X \times Y$ はパラコンパクトである．$\{(x, 0)\}_{x \in X} \cup \{\{x\} \times Y\}_{x \in X}$ は $X \times Y$ の任意の開被覆の局所有限な細分になっている．$(X \cup \{p\}, \sigma)$ を particular point topology をいれた空間とし，particular topology は p とする．このとき $\{\{p, a\} | a \in X\}$ は point finite refinement が存在しない $X \cup \{p\}$ の可算開被覆となっている．よってこの空間は metacompact ではない．しかし，$f : X \times Y \longrightarrow X \cup \{p\}$ を $f(x, 0) = p, f(x, 1) = x$ とすると，これは連続でかつ開写像である．実際 $f^{-1}(\{p\}) = X \times \{0\}, f^{-1}(\{p, a\}) = X \setminus \{a\} \times \{0\} \cup \{a\} \times Y$ より f は連続．また $f(a, 0) = \{p\}, f(\{a\} \times Y) = \{p, a\}$ であるから開写像である．以上より paracompact 性は連続写像で保たれない．

２０．Particluar Point Topology は以下のように拡張できる．(X, τ) を任意の空でない空間とし，p を X にない点とする．$X^* = X \cup \{p\}$ に τ^* という位相を以下のように入れる．τ^* の元は空集合か，そうでなければ $U \cup \{p\}, U \in \tau$ という形のものとする．これが開集合系の公理をみたすことは明らか．X^* 以外の (X^*, τ^*) における閉集合は (X, τ) における閉集合であるから，(X^*, τ^*) を (X, τ) の closed extension とよぶ．Particluar Point Topology は離散空間 $X \setminus \{p\}$ の closed extension になっている．

２１．$X \setminus \{p\}$ の離散性に依存する性質以外は Particluar Point Topology と Closed Extension Topology は同じ性質を持つ．(X^*, τ^*) が T_0 空間であることの必要十分条件は (X, τ) が T_0 空間であることである．しかし (X^*, τ^*) は T_1, T_2, T_3 空間ではない．さらに (X^*, τ^*) が T_4, T_5 空間であることと (X, τ) が T_4, T_5 空間であることは同値である．