分離公理

X を位相空間とする．$a, b \in X, a \neq b$ とする． T_0 空間 a の近傍で b を含まないか，b の近傍で a を含まないものがある．T_1 は a の近傍で b を含まないものがある．T_2 はハウスドルフ．T_3 は閉集合とそこに含まれない一点を分離できる．T_4 は二つの互いに素な閉集合を分離できる．T_i 分離公理をみたすのもの．T_0 かつ T_3 が正規．

コンパクト

コンパクトと局所コンパクト．局所コンパクトの定義．１:x の近傍でコンパクトなものが取れる．２：x の近傍で相対コンパクトなものが取れる．３：コンパクトからなる基本近傍系が取れる．この本では１を局所コンパクト，２を強局所コンパクト．局所コンパクトだけど強局所コンパクトではない例もある．(ex9)

Prop. ハウスドルフ空間なら１と２は同値．

Proof. １ならば２．ハウスドルフだからコンパクト集合は閉集合．よって成り立つ．２ならば１は明らか． □

局所連結

局所連結の定義．点 x で局所連結とは x の開基本近傍系で連結なものが取れる．弱局所連結の定義．x で弱局所連結空間とは x の基本近傍系で連結なものが取れる．x で局所連結なら x で弱局所連結．

Thm. 局所連結空間であることと弱局所連結空間であることは同値．またそれらと任意の開集合 O に対して，O の各連結成分が開であることと，連結な開集合の全体が取れることは同値．

Proof. 内田先生の位相の本を参照． □

ただし一点で弱局所連結であるからといってその一点で局所連結であるとは言えない．(ex119)

CounterExamples: **(Finite, Countable, Uncountable) Discrete Topology**

集積点の定義：x が A の集積点であるとは $x \in A \setminus \bar{\{x\}}$．離散位相では $X \setminus \bar{\{x\}} = X \setminus \{x\} \not\ni x$．よって任意の点は孤立点．$\bar{\{x\}} = \{x\} \ni x$ より任意の点は adherent.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

という距離を入れることで距離化可能．$\{x\}$ は x の開かつ閉近傍．一点集合はコンパクトであるから強局所コンパクト空間である．X はパラコンパクト.

X がたかだか可算集合であるときは σ コンパクト，よってリンデーレフ空間．また第二可算公理を満たす．($\{\{x\}\}_{x \in X}$ を考えればよい．)．X が非可算集合であるときはリンデーレフ空間でない．何故ならば $\mathcal{U} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ を考えればよい．よって σ コンパクトでない．(σコンパクトならリンデーレフ空間．対遇を使った．) 可分でもない．可分と仮定すると $A = \bar{A} = X$ となるが A は非可算．よって矛盾．X の要素数が 2 以上なら非連結.

$B_x = \{\{x\}\}$ とすると $f : [0,1] \ni t \mapsto x \in X$ は連続．よって locally path connected．X の要素数が 2 以上だと connected じゃないので path connected でもなくて arc connceted でもない．例外的に一点集合は arc connected なので locally arc connected.

CounterExamples: **Indiscrete Topology**

以下では $|X| \geq 2$ のときのみ考える．空集合と全体集合以開集合が存在しないので，空または全体集合以外で，開や閉，F_σ, G_δ となるものは存在しない．また任意の部分集合はコンパクトかつ点列コンパクト．点列コンパクトであるのは，任意の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は任意の点に収束することからわかる．$\bar{\{x\}} = X$ より可分．indescrete topology に値をとる任意の写像は連続写像である．よって弧状連結 (任意の二点 a, b に対して $f : I \longrightarrow X$ で $f(0) = a, f(1) = b, f(t) = a\ (0 < t < 1)$ とすれば f は連続).

T_0 でないから (近傍は X のみ)，T_1, T_2 でない．閉集合は空集合か全体集合で $F : closed, x \neq\in F \Longrightarrow F =$ より $F \subset U =, y \in V = X, U \cap V = \phi$．よって T_3．$F_1, F_2 : closed,\ F_1 \cap F_2 = \phi$ とすると閉集合は空集合か全体集合なので $F_1 = X, F_2 = \phi$ としてよく，$F_1 \subset \phi, F_2 \subset X, \phi \cap X = \phi$ より T_4．T_5 の定義は任意の部分空間が T_4 であること．密着空間の部分空間は密着空間で，密着空間は T_4 なので T_5.

密着位相は擬距離化可能．なぜならば

$$d(x, y) = 0\ \forall x, \forall y \in X$$

とすると，d は擬距離関数で，任意の ε 開球は X に等しい．擬距離関数から位相を定めることができ，それは密着位相になる．距離化可能であると仮定すると $|X| \geq 2$ の仮定から $x, y \in X,\ x \neq y$ となるものが存在する．$\varepsilon = d(x, y) > 0$ とすると $x \in N_\varepsilon(x),\ y \neq\in N_\varepsilon(x) = X$ となり矛盾．$\beta = \{X\}$ とすればこれが開基になる．よって第二可算公理を満たす．これより第一可算公理も満たす．パラコンパクト性も任意の開被覆に対して $\mathcal{U} = \{X\}$ という局所有限な細分がとれる．