

数値解析

- 漸化式 $3a_{n+1} - 7a_n + 2a_{n-1} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を初期条件 $a_0 = 3, a_1 = 1$ の下で解く。この時次の問いに答えよ。
 - この問題の厳密解 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。
 - $a_0 = 3, a_1 = 1$ から出発して、

$$a_{n+1} = \frac{7a_n - 2a_{n-1}}{3} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

を用いて浮動小数点数演算により a_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) を順次求めると、得られた数値解の精度はどのようなになると予想されるか。またそのように予想される理由を述べよ。

- 上記 (b) と同じ方法で漸化式 $2a_{n+1} + 3a_n - 2a_{n-1} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を初期条件 $a_0 = 2, a_1 = 1$ の下で数値的に解くとどのような事が起こるか述べよ。
- A を実 $n \times n$ 正則行列、 b を与えられた n 次元ベクトル、 x を未知の n 次元実ベクトルとする。線型方程式 $Ax = b$ の Gauss の消去法について、以下の問いに答えよ。
 - 部分 pivoting を伴う Gauss の消去法のアルゴリズムを記せ。
 -

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{絶対値最大?}$$

のとき、方程式 $Ax = b$ を部分 pivoting を伴う Gauss の消去法で解け。

- 一般に、部分 pivoting を行なわなくても Gauss の消去法が実行できる場合でも、部分 pivoting を行なう事が望ましいとされる。その理由を述べよ。
 - 行列 A の条件数とは何か。定義を記せ。また、条件数が大きい行列 A に対して線型方程式 $Ax = b$ を Gauss の消去法で解くとき、どのような事に注意する必要があるか述べよ。
- A を $n \times n$ 実対称行列とする。Jacobi 法は直交行列 $Q^{(m)}$ を適宜選びながら

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(m+1)} = Q^{(m)T} A^{(m)} Q^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

を反復し、 $A^{(m)}$ の非対角成分の絶対値を小さくする事によって A の固有値を近似的に求める算法である。この時、

- 古典的 Jacobi 法によって A の固有値をすべて求める手順を記せ。
 - $A^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) の固有値は A の固有値と一致することを示せ。
 - 十分大きな m に対して $A^{(m)}$ の非対角成分の絶対値の最大値が ϵ ($\epsilon > 0$) 以下になったとする。この時、古典的 Jacobi 法によって求められた固有値の精度は $(n-1)\epsilon$ で評価される事を示せ。
- $a > 0$ のとき、方程式 $x^2 - a = 0$ を解くことにより $\sqrt{a}$ を求めたい。この時、以下の問いに答えよ。
 - この問題を Newton 法で解くアルゴリズムを示せ。
 - 初期値 $x^{(0)}$ が正の数であるとする。この時、(a) のアルゴリズムは確かに $\sqrt{a}$ に収束する事を示せ。
 - $x^2 - a = 0$ を変形して $x = g_1(x)$ 及び $x = g_2(x)$ を得る。ここに $g_1(x) = 2x - a/x, g_2(x) = x/3 + 2a/(3x)$ 。反復 $x^{(m+1)} = g_1(x^{(m)})$ 及び $x^{(m+1)} = g_2(x^{(m)})$ ($m = 0, 1, \dots$) の中で、 $x^{(0)}$ が $\sqrt{a}$ に十分近いとき $x^{(m)}$ が $\sqrt{a}$ に収束するものをあげよ。またその理由を述べよ。