

「力学」について

IMAMURA Yukihiisa (@imaro1690)

自己紹介

- 今村 征央 (ゆきひさ)
- 愛媛県松山市出身
- 京都大学理学部3回生
- 理論物理学全般

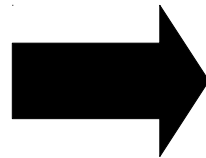
(特に素粒子論、場の理論、超弦理論、数理物理)
来年度は凝縮系理論に所属



ブログもやっています。(imaroの「ロー」って何)

「力学」は物理学のいたるところに現れる

- 古典力学
- 電磁気学
- 熱力学
- 統計力学
- 相対性理論
- 量子力学
- 場の量子論
- ...



- 古典力学
- 熱力学
- 量子力学
- 特殊相対論
- 電磁気学
- 場の量子論
- 統計力学

「力学」はダイナミクスか、メカニクスか...

基本姿勢

- **〇〇論と〇〇力学を区別**

相対性理論と相対論的力学、量子論と量子力学

- **力学とは対象の変化を記述する**

何の上で何が変化するか

(ただし変化の記述が常に力学ではない。例えば対称性)

- **共役量の存在**

力学法則においていつでも出てくるわけではないが重要な概念

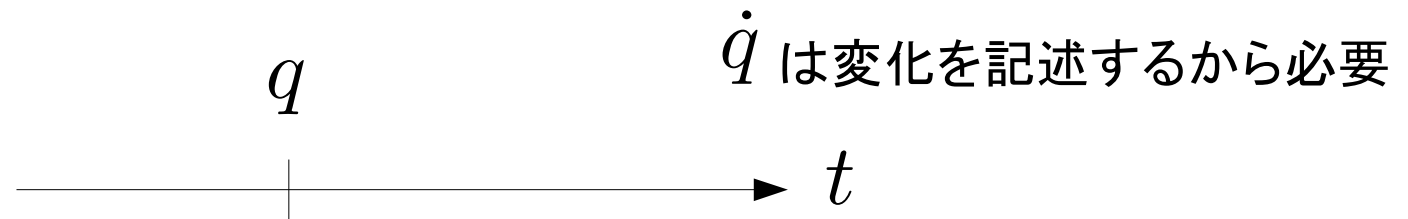
古典力学(Newton力学)

- 対象(物質)は空間を時間発展する
- ~~対象と共に運動する慣性系の存在は仮定されている~~

これは再考の必要あり



→ 時間軸上を変化する座標変数によって記述できる
はず



あとはそれらを組み合わせてLagrangianを作ればよい

(運動項の作り方はランダウの本にある)

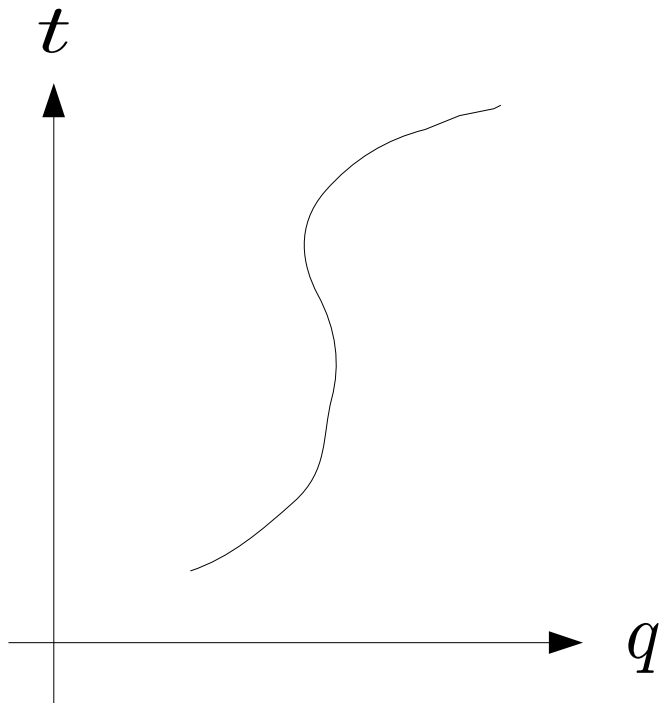
$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})$$

次に...

時間軸上の発展から、時間軸と空間を用いて発展性を表現してみる

→ Hamiltonianの導入と、作用の時間、空間依存性の導入

$$dS(q, t) = pdq - H(p, q)dt$$



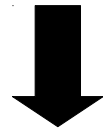
共役量の出現！

共役という考え方は場の理論で非常に有用で、もちろんHamilton力学においても大事な考え方である

(正準量子化にも使われるから、量子力学でも重要ともいえる)

熱力学

- 熱概念と力学的エネルギー概念を結びつける



「力学」として表現

- 熱力学第1法則

$$U_f - U_i = \Delta Q(i \rightarrow f) + \Delta W(i \rightarrow f)$$

熱の変化

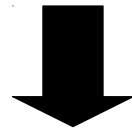
力学的エネルギーの変化

$$\Delta Q = TdS \quad \Delta W = -PdV \text{ など}$$

に書けるのは、準静過程の仮定や、熱力学第2法則の導入が必要

量子力学

- 系の状態をHilbert空間を用いてあらわす(線形性)
- 物理量は作用素を用いてあらわす(非可換性)



「力学」として表現

- 系の状態の時間発展は

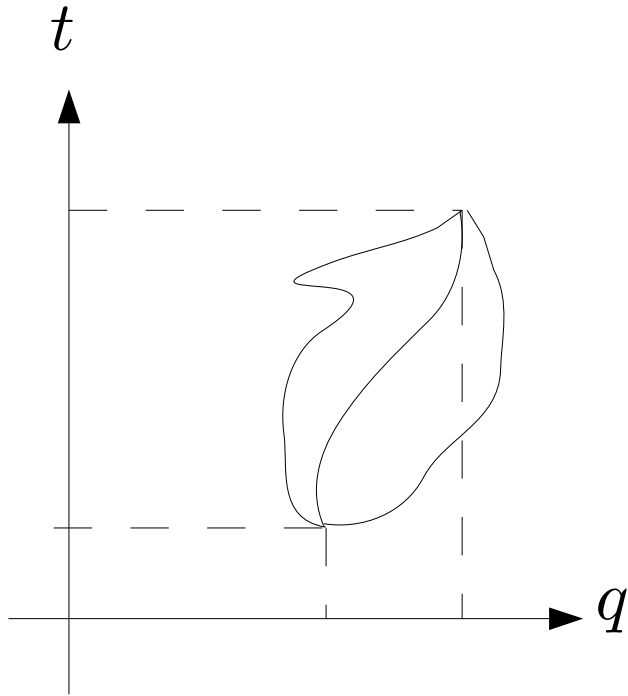
$$|\Psi(t_f)\rangle = \exp \left[-i\hat{H}(t_f - t_i) \right] |\Psi(t_i)\rangle$$



これを微小区間で表現すると
Schroedinger eq.となる

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

経路積分



- ・古典力学において粒子の発展を、時間軸上から時間と空間両方の上に拡張した。
- ・同様の議論を量子力学においても適用できないか？

→ 状態ベクトルとして位置の固有ベクトルを取る

$$\begin{aligned}\langle q_f, t_f | \exp \left[-i\hat{H}(t_f - t_i) \right] | q_i, t_i \rangle &\propto \int [dp dq] \exp \left(i \int (pdq - H dt) \right) \\ &\propto \int [dq] \exp (iS[q(t)])\end{aligned}$$

それでは場の理論へ！

(Green関数による記述)

- 古典場の理論
(電磁場、スカラー場、スピノル場)
- 量子場の理論

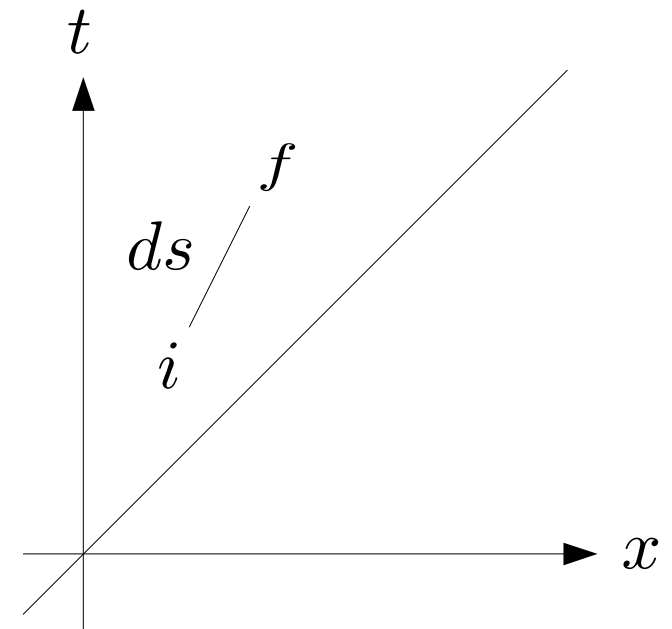
特殊相対性理論

- ・時間と空間を結びつけるので、Newton力学のように時間軸の上のみで発展を記述するわけにはいかない

——▶ Minkowski空間を導入
(つまり世界線上を発展する)

$$S = \int_i^f (-m ds)$$

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2$$



作用の意味については、あとで少し別解釈を加える

なぜMinkowski空間なのか！？（答えの一つの形：Einsteinの論文）

電磁気学

- 場の種類としては少し特殊

光子は質量がゼロ、U(1)gauge対称性

$$\begin{aligned} S_{EM} &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) & F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\nu (-\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu \right] \end{aligned}$$

Lorenz gaugeを採用している

$-i\partial_\mu$ を運動量とみなせば $(-\partial_\mu \partial^\mu)$ は $p_\mu p^\mu$ であり、
質量殻条件と関連付けられそう

Green関数の方法

Green関数は伝播の性質を表現でき、その性質は微分演算子と関連付けられる

$$\bullet \text{~~~~~} \bullet \quad -\partial_\mu \partial^\mu G(x-y) = \delta^4(x-y)$$

$$G_{\mu\nu}(x-y)$$

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2} e^{-ip(x-y)}$$

$$S_{EM} = \int d^4 x \left[-\frac{1}{2} A_\nu (-\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu \right]$$

$$A_\nu \bullet \text{~~~~~} \bullet A_\nu$$

$$-\partial_\mu \partial^\mu$$

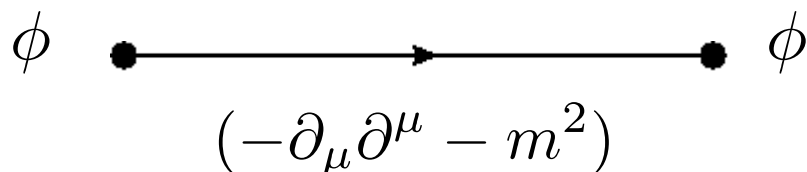
つまり、Green関数まで行かなくても微分演算子の形を見れば、その場の力学法則は分かるはず！

スカラー場

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi \right] \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi \right] \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi \end{aligned}$$

複素スカラー場なら片方を
複素共役にする

∂_μ を運動量とみなせば、 $-\partial_\mu \partial^\mu$ は $p_\mu p^\mu$ となり、
 $(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)$ は質量殻条件とみなせる



ちょっと休憩

(Dirac行列について少し)

Dirac行列

- Pauli行列を用いて表示する

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

- 右辺の $\mu\nu$ 対称性が左辺では自動的に満たされており、対称性を代数的なもので表現できていると捉えられる

——▶ 計量をDirac行列に書き直せられないか！？

$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ を特殊相対論に適用してみよう

$$\begin{aligned} ds^2 1 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_\mu dx^\mu \gamma_\nu dx^\nu + \gamma_\nu dx^\nu \gamma_\mu dx^\mu) \\ &= (\gamma_\mu dx^\mu)^2 \end{aligned}$$

!

$$S = \int_i^f (-m ds) \sim \int_i^f (-m \gamma_\mu) dx^\mu$$

作用の被積分関数に行列を使うことは出来ないの
で、アナロジーである

$-m\gamma_\mu$ を空間の共役量(つまりは運動量)とみなすことが出来る

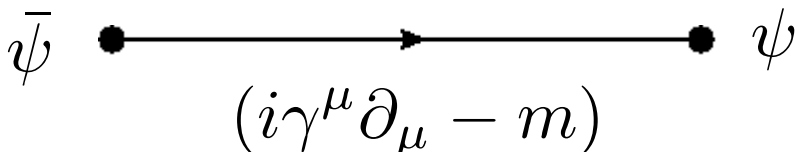
SUSY代数や微分幾何においても同様の構造が見える

休憩は終わり

(スピノル場への準備が整った)

スピノル場

- QEDでは電子を記述する4成分スピノル場を考える

$$S = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$


A Feynman diagram representing a fermion propagator. It consists of a horizontal line with an arrow pointing from left to right. At the left end of the line is a solid black dot, and at the right end is another solid black dot. To the left of the first dot is the symbol $\bar{\psi}$, and to the right of the second dot is the symbol ψ . Below the horizontal line, centered between the two dots, is the expression $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)G(x - y) = \delta^4(x - y)$$

$$G(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m} e^{-ip(x-y)}$$

ちなみに場のU(1)変換についてのNoether currentは $-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

場の量子論

- 量子論だから状態の変化を記述する
- 古典場を作用素とする

....あとは今までの議論を組み合わせるだけ

U(1)gauge場を相互作用
として入れてみた

$$Z(\bar{\eta}, \eta, J) = \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA_\mu] \exp [i (S_0 + S_{int} + S_J)]$$

↑
こいつらはそれぞれの場の共役量
(Zに微分演算をして摂動展開を表現するために使える)

統計力学

分配関数 $Z = \sum e^{-\beta E}$

場の量子論の場合と似ている！

(実際に計量のユークリッド化などの方法でアナログに結びつく)

しかし

場の量子論では粒子の運動というイメージを比較的つかめたが、
統計力学では同様のイメージは不可能である

——▶ **果たして、統計力学は「力学」か！？**

この問いは自分自身への宿題です。(ネタは幾つかあるものの・・・)

教科書など

- ランダウ=リフシッツ理論物理学教程
(力学、場の古典論、統計物理学)
 - 熱力学入門 (佐々真一)
 - 熱力学 (田崎晴明)
 - An Introduction Quantum Field Theory (Peskin, Schroeder)
 - String Theory (Polchinski)
 - ゲージ場の量子論 (九後汰一郎)
 - 現代量子物理学 (上田正仁)
 - 量子力学 (猪木・川合)
 - 大学演習 熱学・統計力学 (久保亮五)
-
- 電磁気学の基礎 (太田浩一)
-
- Modern Supersymmetry (Terning)
 - 微分形式の幾何学 (森田茂之)