2.3.3　エビデンスの挿入　*(エビデンスを証明とか訳すよりかエビデンスのままで)*

あなたが何か新しい情報を得たときに、ベイジアンネットワークをつかって何か新しい確率を計算するとしよう。その新しい情報を得る前の情報をタイプ A=a とする。ここで A は変数を、そして a は A の状態を表す。A は n 個の状態をもっており、それらの確率が P(A)=(x1,..,xn)と表されるとしよう。そして、A が状態 i かまたは j にあるときにのみ、新しい情報 e が得られるものと仮定しよう。これをステートメントすると、状態 i と j を除いた他の状態は全て不可能なので、確率密度を P(A,e) = (0,…,0,xi,0,…,0,xj,0,…0)というふうに表せるだろう。

ここで、P(e)は e の事前確率を表し、P(e)は P(A,e)を A で周辺化することで得られる。また、P(A,e)は P(A)を (0,…,0,1,0,…,0,1,0,…0)で乗じた結果である。この () 内の 1 の位置は i 番目と j 番目にあたる。

以下、スライドからの例。

Consider a variable A with five states a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 and with probability:

$$P(A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 1$$

Assume that we get the evidence e: "A is either in state a_2 or a_4". Then:

$$P(A,e) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Thus, e can be represented by a potential $\bar{e} = (0,1,0,1,0)^T$ and:

$$P(A,e) = P(A) \cdot \bar{e}$$

定義 2.4　A を n 個の状態をもつ変数とする。このとき A の finding とは、0 と 1 からなる n 次元の表である。

ステートメント e、すなわち「A は状態 i か j のいずれかである」ということと、それに対応する 0／1 の finding ベクトルとの間の違いを示すために、我々はときどきそ

の finding に対して太字の e を用いることがある。意味論的にいうと、finding とは、A のある状態が不可能であるというステートメントである。

ここで、ある結合確率テーブル P(U)があり、e が finding であるとしよう。結合確率テーブル P(U,e)は、P(U)のなかの A のエントリーのうち状態 i か j でない全てのエントリーを 0 でおきかえ、それ以外のエントリーはそのままにしておくことで得られるテーブルである。これは、P(U)を e で乗じたことと同じことである。すなわち、

$$P(U,e) = P(U) \cdot e$$

となる。$P(e) = \Sigma_U P(U,e) = \Sigma_U (P(U) \cdot e)$ であることに留意されたい。ベイジアンネットワークのチェーンルールを用いると、次の定理を得る。

定理 2.2

Theorem: Let BN be a Bayesian network over the universe $\mathcal{U} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, and let $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_m$ be findings. Then:

$$P(\mathcal{U}, e) = P(\mathcal{U}) \cdot \prod_{i=1}^{m} \bar{\varepsilon}_i$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(A_i | \mathrm{Pa}(A_i)) \prod_{j=1}^{m} \bar{\varepsilon}_j.$$

Hence, to find $P(A|e)$ we use:

$$P(A|e) = \frac{\sum_{\mathcal{U}\setminus\{A\}} P(\mathcal{U}, e)}{P(e)}.$$

*** 上の赤字は e、つまり findng であり、ε にみえるけどそうじゃない。*

エビデンスのタイプによっては、finding として表すことはできないものもある。たとえば、あなたがだれかから、**A の状態が a1 にある確率が a2 にある確率の 2 倍高いというステートメント**を受け取ったとしよう。ベイジアンネットワークではこの手のエビデンスを扱うことが可能である。このとき、上述のステートメントは(0.67,0.33)の分布で表すことができ、定理 2.2 を適用できる。ただし、尤度のステートメント（上の太字）が真であるということが何を意味するか不明なので、P(e)をエビデンスの確率として解釈することはできない。したがって、P(U,e)のセマンティックスは不明となる。

我々は尤度のエビデンスについてこれ以上触れないこととする。

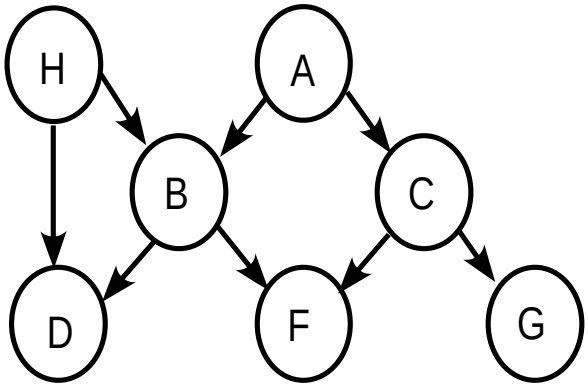
***わかりにくいですが、エビデンスと finding は同じ意味で使われるようにみえるけど場合によってはそうでないということ。Finding はエビデンスの一種であるが逆はそう*

でないということ。太字のステートメントは尤度のステートメントであり、そのステートメントは真であるが、ある状態の確率が別の状態の確率の二倍高いという数値だけではそれが何を意味しているかはわからない。だから、その意味不明な P(e)をつかって P(U, e)をベイズで計算はできるが、P(U, e)の意味もまた不明だということである。単純に数値だけの計算はできるが、実世界の現象に投影しない限り、P(e)が何かのエビデンスかどうかはわからない、つまり finding というのはそういう数値だけの状態のことをいうのかもしれない。

2.3.4　実際の確率計算

2.3.3 節で述べたように、また例 2.6 で説明したように、ベイジアンネットワークで確率を更新するということは、つまりチェーンルールをつかって母集団 U の結合確率テーブル P(U)を計算するということである。ただし、U は、P(U)が手に負えないぐらい大きくなるほど、大きいものである必要はない。本節で我々は結合確率テーブルが完全にわからなくても計算が実行できることを説明する。第 4 章で、確率の更新に対するアルゴリズムを詳細に扱う予定である。

図 2.17 に示すベイジアンネットを考える。どの変数もそれぞれ 10 個の状態をもつと仮定しよう。ここで、我々が e={D=d,F=f}というエビデンスを得たとして、P(A|e)を計算してみる。



チェーンルールから次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
P(U,e) &= P(A,B,C,d,f,G,H) \\
&= P(A)P(H)P(B|A,H)P(C|A)P(d|B,H)P(f|B,C)P(G|C)
\end{aligned}
$$

ここで、P(d|B,H)とは、D のエントリーを状態 d に修正して得られる、B と H にわたってのテーブルを指す。つまり、条件付き確率テーブルは、D=d として既知になったといいかえてもよい。ここで、我々は 10 の 7 乗ものエントリーをもつ P(U)の完全なテーブルを計算する必要はない。まず、エビデンス e が入力された時点で、このケースでは（少し減って）10 の 5 乗のエントリーのテーブルで作業することになるだろう。あとで、我々は多くても 1000 個のエントリーしかないテーブルで作業すればよいことがわかる。**つまり、10 の 3 乗、つまり変数が三つまで削減されるってことね。*

P(A,e)を計算するのに、我々は P(A,B,C,d,f,G,H)から変数 B,C,G,H を周辺化する。周辺化する順番は結果に影響を与えないので、G から始めよう。

$\Sigma_G P(A,B,C,d,f,G,H)$
$= \Sigma_G P(A)P(H)P(B|A,H)P(C|A)P(d|B,H)P(f|B,C)P(G|C)$

右辺において、最後のテーブルだけがGをその領域にもっているので、分布法則（1.4節参照）から次のようになる。

$\Sigma_G P(A,B,C,d,f,G,H)$
$= P(A)P(H)P(B|A,H)P(C|A)P(d|B,H)P(f|B,C) \ \Sigma_G P(G|C)$

我々は$\Sigma_G P(G|C)$を計算する必要はない。実際、C の各状態 c に対して、我々は$\Sigma_G P(G|c)=1$である。したがって、計算は必要なく、次の式をえる。

$\Sigma_G P(A,B,C,d,f,G,H)$
$= P(A)P(H)P(B|A,H)P(C|A)P(d|B,H)P(f|B,C)$

次に、Hについて周辺化する。同様にして次の式を得る。

$\Sigma_H P(A,B,C,d,f,H)$
$= P(A)P(C|A)P(f|B,C) \ \Sigma_H P(H)P(B|A,H)P(d|B,H)$

上の式の右辺で$P(H)$と$P(B|A,H)$と$P(d|B,H)$を乗じて、それをHについて周辺化する。その結果を$T(d,B,A)$とすると、次の式をえる。

$P(A,B,C,d,f) = P(A)P(C|A)P(f|B,C) \ T(d,B,A)$

最後に、この積を計算して、それからBとCについて周辺化する。　なお、5つの変数をもつ $P(A,B,C,d,f,G,H)$のなかで、三つより多い変数のテーブル（上の $P(H)$と$P(B|A,H)$と $P(d|B,H)$の積は A,B,H の三つの変数のテーブルだから扱える）を扱えないことに留意する。我々がここで用いた手法は、変数削減と呼ばれ、次のように説明できる。

テーブルの集合 T があるとする。これを変数 X について周辺化しよう。我々は T からその領域に X をもつ全てのテーブルを抽出し、それらの積を計算する。そして、その積を X について周辺化し、その結果のテーブルを T に加える。

＊＊最終的に A, B, C の三つの変数だけもった 1000 個のエントリーのテーブルを扱え

ばよいことになる。スライドの方にもっとわかりやすい（10 でなく）2 個の状態をもつ変数削減の例がのっている。