2011/03/23 柚井

Bayesian Networks and Decision Graphs 輪講

## 1.2 確率理論の基礎

・ある実験を行ったときに，起こり得る全ての結果の集合を Sample Space（$S$, 標本空間）という。

例 1．サイコロの場合 $S$={1,2,3,4,5,6}

例 2．サッカーの場合 $S$={yes,no}

・標本空間の部分集合を Event（事象）という.

例．サイコロの場合 $A$={3,4,5,6}

・確率 P($A$)：不確かさの度合い

・確率は以下の 3 つの公理に従っていなければならない。

Axiom 1 P($S$)=1

Axiom 2 P($A$)≧0

Axiom3 $A \subseteq S, B \subseteq S$ かつ$A \cap B = 0$(空集合の記号)ならば$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Axiom3 の例：

サイコロを 1 回ふるとき、3 の目が出る事象を $B$、2 か 4 か 6 の目が出る事象を $A$ とすると、$A$ と $B$ は互いに素の事象であり、これらの 2 つの事象のうち 1 つが起こる確率は、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

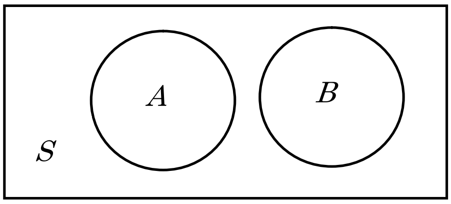


Fig.1.1(a) the two events A and B are disjoint

一方、事象 A と事象 B が互いに素でない(Fig.1.1(b)参照)とき、2 つの事象のうちの 1 つが起こる確率は、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ここで $A \cap B$ は $A$ と $B$ の共通部分であり $A$ と $B$ が同時に起こる事象のことである。

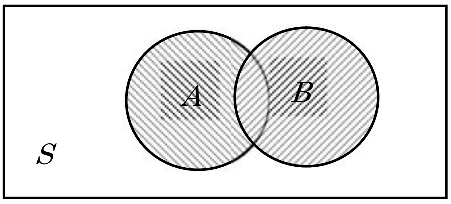


Fig.1.1(b) A∩B≠0(空集合の記号)

トランプを例にして考える。

事象 $A$ をスペードを引く、事象 $B$ をキングを引くとすると $A$ と $B$ の共通部分はスペードのキングを引くことである。その確率は、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

1.2.1 Conditional Probabilities(条件付き確率)

条件付き確率：事象 $B$ が与えられたときに事象 $A$ が起こる確率。$P(A|B)$と表記される。

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

例：サイコロを 1 回ふるとき、4 の目が出る事象を $A$、2 か 4 か 6 の目が出る事象を $B$ とする。2 か 4 か 6 の目が出たことがわかっているとき、出た目が 4 である確率は、$P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)=(1/6)/(3/6)=1/3$。

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

また、もう 1 つ事象を加えた場合の条件付き確率は以下のように定義される。

$$P(A \mid B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

1.2.2 Probability Calculus

Theorem 1.1 (The fundamental rule)

$$P(A|B)P(B)=P(A \cap B) \tag{1.1}$$

The fundamental rule によって B が与えられたときの A が起こる確率と B の確率を知っているときに、A と B が同時に起こる確率を求めることができる。

ほかの事象 C を条件付けることによって、The fundamental rule は以下のように書ける。

$$P(A|B \cap C)P(B|C)=P(A \cap B|C)$$

$P(A \cap B)=P(B \cap A)$なので、$P(A|B)P(B)=P(A \cap B)=P(B|A)P(A)$である。

よって、ベイズの法則が以下のように導かれる。

Theorem 1.2 (Bayes' rule)

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

ベイズの法則は、事象 B についての情報を与えられたときの事象 A についての信念を更新する方法である。このため、一般的に P(A)は事前確率、P(A|B)は事後確率、P(B|A)は尤度と呼ばれる。

状況 C でのベイズの法則は以下のようになる。

$$P(A \mid B,C) = \frac{P(B \mid A,C)P(A \mid C)}{P(B \mid C)}$$

例1.1　我々は 2 つの病気 a1 と a2 を持っているとし、両方とも兆候 b の原因となりえるとする。また、P(b|a1)=0.9、P(b|a2)=0.3 であり、a1 と a2 の事前確率は等しいとする（P(a1)=P(a2)）。

今、b が起きたとすると、ベイズの法則より以下が導かれる。

$$P(a1 \mid b) = \frac{P(b \mid a1)P(a1)}{P(b)} = 0.9 \bullet \frac{P(a1)}{P(b)};$$

$$P(a2 \mid b) = \frac{P(b \mid a2)P(a2)}{P(b)} = 0.3 \bullet \frac{P(a2)}{P(b)}.$$

たとえ事後確率が計算できないとしても、以上より P(a1|b)は P(a2|b)の 3 倍であることがわかる。

更に、もし、a1 と a2 は b のみが原因であるということがわかったら P(a1|b)+P(a2|b)=1 であるので以下を得る（ただし a1 と a2 が同時に起きる確率は 0 と仮定している）。

$$\frac{P(a1)}{P(b)} = \frac{P(a2)}{P(b)} = \frac{1}{0.9+0.3} = \frac{1}{1.2},$$

よって、

$$P(a1 \mid b) = 0.9 \bullet \frac{P(a1)}{P(b)} = \frac{0.9}{1.2} = 0.75;$$

$$P(a2 \mid b) = 0.3 \bullet \frac{P(a2)}{P(b)} = \frac{0.3}{1.2} = 0.25.$$

### 1.2.3 Conditional Independence(条件付き独立)

時々、事象 B についての情報は事象 A が起こることについての信念を変えない。この場合を A と B は独立であると言う。

Definition 1.1 (Independence)

もし P(A|B)=P(A)なら、A と B は独立である。

例：　2 つのサイコロを投げるとき、1 つのサイコロが 2 を出したとしても、このことはもう 1 つのサイコロが何の目を出すかについて影響しない。

この概念は symmetric である。つまりもし A が B について独立なら、B は A について独立である。

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

ただし、これは P(A)>0 のときに成り立つ。もし P(A)=0 ならば計算は妥当でない。しかしながら、我々にとってこのことはあまり問題でない。なぜならもし A が不可能なら、それについて考える意味がないからである。

もし、２つのイベントが独立なら、the fundamental rule は以下のように書き換えられる。

$$P(A∩B)=P(A|B)P(B)=P(A)・P(B)$$

事象 C についてすでに知っていて事象 B についての情報が事象 A についての信念を変えないなら、A と B は C を与えられた条件で独立である。

Definition 1.2 (Conditional independence)

もし、P(A|B∩C)=P(A|C)なら、事象 A と事象 B は事象 C のもと条件付き独立である。

この概念も symmetric である。つまり、もし事象 C のもと事象 A が事象 B について独立なら、事象 B は事象 C のもと事象 A について独立である。

$$P(B \mid A \cap C) = \frac{P(A \cap B|C)P(C)}{P(A|C)P(C)} = \frac{P(A|B \cap C)P(B|C)}{P(A|C)} = \frac{P(A|C)P(B|C)}{P(A|C)} = P(B|C)$$

更に、２つの事象が条件付き独立なら、両方の事象が起きる確率を計算する際に上述のような multiplication rule が使える。

$$P(A∩B|C)=P(A|C)・P(B|C)$$

ただし、２つの事象が独立のとき、それはたいてい C=0（空集合の記号）であるという特別なケースである（？）