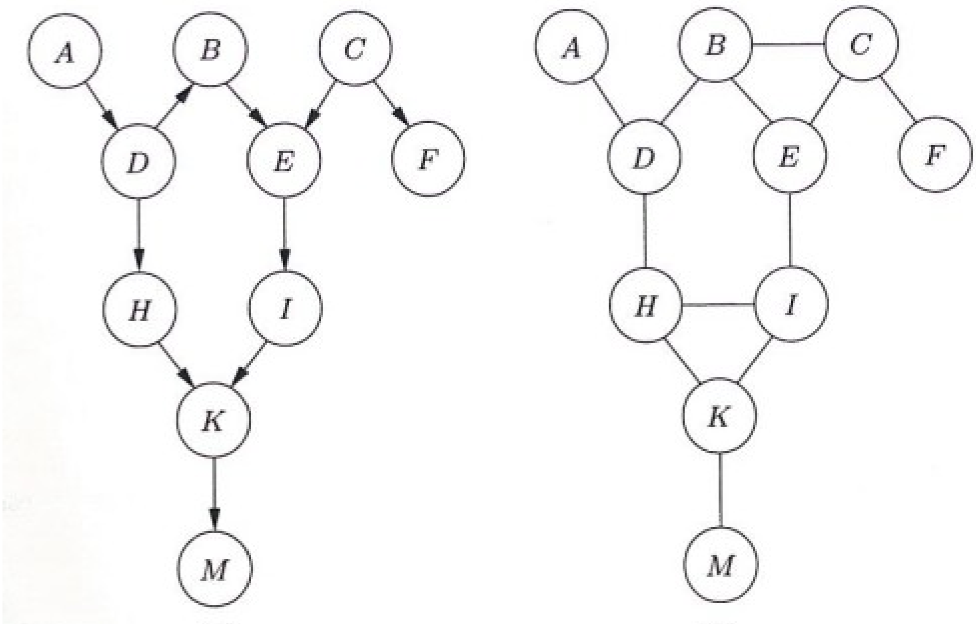
2.3 ベイジアンネットワーク

2.3.1 ベイジアンネットワークの例

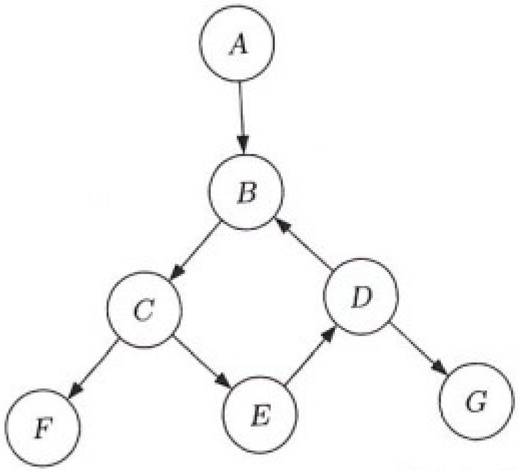
- 図 2.10 において、B と M が印をつけられた条件で、A が F から d-分離されているかどうか試すには、まず、{A,B,F,M} に対して先祖のグラフを作る（図（a））。次に、共通の子供に対して線を結び、すべての矢印を線に変える（図（b））。A-D-H-K-I-E-C-F が B と M を横切らないことが分かるので、B と M が与えられた時、A と F は d-接続されている。



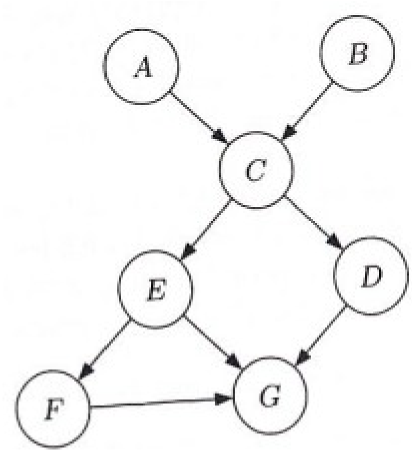
(a) (b)

- **定義 2.3** ベイジアンネットワークは以下の項目で構成される：
  －変数のセットと変数間の矢印
  －各変数は相互排他状態のセットを有限個持つ
  －変数と矢印は非環式のグラフを形成する（伝統的に DAG と略される）；$A_1=A_n$ となるような $A_1 \rightarrow \ldots \rightarrow A_n$ でなければ、矢印のグラフは非環式である

- フィードバック環のある矢印グラフ。これはベイジアンネットワークでは許されていない。



- 矢印非環式グラフ（DAG）。明らかにすべき確率は P(A),P(B),P(C|A,B),P(E|C),P(D|C),P(F|E),P(G|D,E,F)



2.3.2 ベイジアンネットワークのためのチェーンルール

- 命題 2.1（一般的なチェーンルール）U={A_1,…,A_n}を変数のセットのとき、いかなる確率分布 P(U)に対しても

$$P(\mathcal{U}) = P(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}) P(A_{n-1} \mid A_1, \ldots, A_{n-2}) \ldots P(A_2 \mid A_1) P(A_1).$$

  が成り立つ。

  証明。基本ルールの反復使用

$$P(\mathcal{U}) = P(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}) P(A_1, \ldots, A_{n-1}),$$
$$P(A_1, \ldots, A_{n-1}) = P(A_{n-1} \mid A_1, \ldots, A_{n-2}) P(A_1, \ldots, A_{n-2}),$$
$$\vdots$$
$$P(A_1, A_2) = P(A_2 \mid A_1) P(A_1).$$

- **命題 2.1（ベイジアンネットワーク用のチェーンルール）** BN が U={A_1,…,A_n}に対するベイジアンネットワークであるとする。BN で明らかになったすべての条件付き確率の表の積で唯一の確率分布 P(U)を B が明らかにする：

$$P(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i)),$$

pa(A_i)は BN で A_i の親で、P(U)は BN の性質を反映する。

- n-1 個の変数とすべての条件付き確率の積である分布 P(U)を持つどんなベイジアンネットワークに対しても、もし C の条件で A と B が d-分離しているならば、P(A|B,C)=P(A|C)であると仮定する。BN が n 個の変数{A_1,…,A_n}を持つベイジアンネットワークであるとする。A_nには子供がいなく、BN から An を除いたものを BN'とする。明らかに BN'は BN と同じ条件付き分布を持つベイジアンネットワークであり（A_nを除いて）、{A_1,…,A_n}では BN と同じ d-分離特性を持つ。加えて、

$$\begin{aligned} P(\mathcal{U} \setminus \{A_n\}) &= \sum_{A_n} P(\mathcal{U}) = \sum_{A_n} \prod_{i=1}^{n} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i)) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i)) \sum_{A_n} P(A_n \mid \mathrm{pa}(A_n)) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i)) \mathbf{1} = \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i)), \end{aligned}$$

と帰納法の仮定 P(U/{A_n})が BN'の特性を反映する。今、もし BN で、C の条件で A と B が d-分離されている時、これらは BN'でも d-分離されている。それゆえ、P(A|B,C)=P(A,C)となる。A_nを含んだ d-分離においてもこれが成り立つことを示すために 、A_n∈C の場合と A=A_nの場合を考える。一つ目は成り立つ。なぜなら、A_nは合流接続部にしか現れないので、もし C の条件で A と B が d-分離している時、C＼{A_n}の条件でも d-分離していて、上記の状況になる。二つ目として、まず

$$P(A_n \mid B, \mathcal{C}) = \sum_{\mathrm{pa}(A_n)} P(A_n \mid B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)) P(\mathrm{pa}(A_n) \mid B, \mathcal{C}).$$

と書く。今、もし C の条件で A_n と B が d-分離ならば、C の条件で pa(An)と B もまた d-分離である。A_n が関係していないので、P(pa(A_n) | B,C)=P(pa(A_n) | C)となる。なので 、P(A_n | B,C, pa(A_n))=P(A_n | pa(A_n))であることを示せばよい。基本ルールとチェーンルールを用いると

$(A_n))$. Using the

$$\begin{aligned}
P(A_n \mid B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)) &= \frac{P(A_n, B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n))}{P(B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n))} = \frac{\sum_{\mathcal{U} \setminus \{A_n, B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} P(\mathcal{U})}{\sum_{\mathcal{U} \setminus \{B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} P(\mathcal{U})} \\
&= \frac{\sum_{\mathcal{U} \setminus \{A_n, B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} \prod_{i=1}^{n} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i))}{\sum_{\mathcal{U} \setminus \{B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} \prod_{i=1}^{n} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i))} \\
&= \frac{P(A_n \mid \mathrm{pa}(A_n)) \sum_{\mathcal{U} \setminus \{A_n, B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i))}{\sum_{\mathcal{U} \setminus \{A_n, B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i)) \sum_{A_n} P(A_n \mid \mathrm{pa}(A_n))} \\
&= \frac{P(A_n \mid \mathrm{pa}(A_n)) \sum_{\mathcal{U} \setminus \{A_n, B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i))}{\sum_{\mathcal{U} \setminus \{A_n, B, \mathcal{C}, \mathrm{pa}(A_n)\}} \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid \mathrm{pa}(A_i)) \mathbf{1}} \\
&= P(A_n \mid \mathrm{pa}(A_n)).
\end{aligned}$$

- *例 2.6（改訂版車スタート問題）*ベイジアンネットワーク用に結合確率の表はチェーンルールから計算される。

$$P(Fu, FM, SP, St) = P(Fu)P(SP)P(FM \mid Fu)P(St \mid Fu, SP).$$

結果を表 2.2、表 2.3 に示す。

	$FM = full$	$FM = \frac{1}{2}$	$FM = empty$
$Sp = yes$	(0.363, 0)	(0.559, 0)	(0.0093, 0)
$Sp = no$	(0.00015, 0)	(0.00024, 0)	$(3.9 \cdot 10^{-6}, 0)$

Table 2.2. The joint probability table for $P(Fu, FM, SP, St = yes)$.

	$FM = full$	$FM = \frac{1}{2}$	$FM = empty$
$Sp = yes$	$(0.00367, 1.9 \cdot 10^{-5})$	$(0.00564, 1.9 \cdot 10^{-5})$	$(9.4 \cdot 10^{-5}, 0.0192)$
$Sp = no$	$(0.01514, 8 \cdot 10^{-7})$	$(0.0233, 8 \cdot 10^{-7})$	(0.000388, 0.000798)

Table 2.3. The joint probability table for $P(Fu, FM, SP, St = no)$. The numbers (x, y) in the table represent $(Fu = yes, Fu = no)$.

- FM と Fu を表 2.3 から周辺化することにより（各行を足す）、

$$P(SP, St = no) = (0.02864, 0.03965).$$

となる。

- 条件付き確率P(SP | St=no)はP(St=no)で割ることによって得られる。これは 、P(St=no)＝P(SP=yes,St=no)+P(SP=no,St=no)=0.02864+0.03965=0.06829と簡単に得られ、

$$P(SP \mid St = no) = \left(\frac{0.02864}{0.06829}, \frac{0.03965}{0.06829}\right) = (0.42, 0.58).$$

となる。

- 同様にP(Fu | St=no)=(0.71,0.29)

- FM=1/2、St=noの場合の結果を表2.4に示す。

	$Fu = yes$	$Fu = no$
$Sp = yes$	0.00564	$1.9 \cdot 10^{-5}$
$Sp = no$	0.0233	$8 \cdot 10^{-7}$

Table 2.4. $P(Fu, SP, St = no, FM = \frac{1}{2})$.

- Spを周辺化し標準化すると、P(Fu | St=no,FM=1/2)=(0.999,0.001)となる。Fuを周辺化し標準化すると、P(Sp | St=no,FM=1/2)=(0.196,0.804)となる。