1.3 変数のための確率計算法

- $a_1,\ldots,a_n$の状態がある変数 A については状態が不確定であることを，確率分布 P(A)を用いて以下のように示す.

$$P(A) = (x_1, \ldots, x_n); \qquad x_i \geq 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n = 1,$$

x_iは A が a_iである確率.

- もし B が $b_1,\ldots,b_n$の状態をもっていたとすると，

$$\sum_{i=1}^{n} P(A = a_i \,|\, B = b_j) = 1 \text{ for each } b_j.$$

表 1.1 に例を示す.

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.4	0.3	0.6
a_2	0.6	0.7	0.4

Table 1.1. An example of a conditional probability table $P(A \,|\, B)$ for the binary variable A given the ternary variable B. Note that for each state of B the probabilities of A sum up to 1.

- 変数 A と B の(a_i,b_j)に対し，P(A,B)は $A=a_i$で $B=b_j$である確率を示す．A と B は排他的であり，包括的であるため，以下が成り立つ.

$$P(A, B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(A = a_i, B = b_j) = 1.$$

表 1.2 に例を示す.

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.16	0.12	0.12
a_2	0.24	0.28	0.08

Table 1.2. An example of a joint probability table $P(A, B)$ for the binary variable A and the ternary variable B. Note that the sum of all entries is 1.

- 式(1.1)を適用すると以下が成り立つ.

$$P(a_i \,|\, b_j) P(b_j) = P(a_i, b_j).$$

- P(B)=(0.4,0.4,0.2)だとすると，表 1.2 は表 1.1 に対して，前述の公式を用いた結果となる．

$$P(A,B) = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.4\cdot 0.4 & 0.3\cdot 0.4 & 0.6\cdot 0.2 \\ a_2 & 0.6\cdot 0.4 & 0.7\cdot 0.4 & 0.4\cdot 0.2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.16 & 0.12 & 0.12 \\ a_2 & 0.24 & 0.28 & 0.08 \\ \hline \end{array}$$

Table 1.3. The joint probability table $P(A,B)$ in Table 1.2 can be found by multiplying $P(B) = (0.4, 0.4, 0.2)$ by $P(A\,|\,B)$ in Table 1.1.

- 定理 1.3（変数の基本ルール）

$$P(A,B) = P(A\,|\,B)P(B),$$

別の変数 C によって条件付けがされていれば，

$$P(A,B\,|\,C) = P(A\,|\,B,C)P(B\,|\,C).$$

となる．

- 確率 P(A,B)の表から，A の各状態 a_i で起きる B の結果を考慮し，確率 P(A)を算出することができる．A が状態 a_i である場合が m 通りあるとする．つまり，相互に排他である$(a_i,b_1),\ldots,(a_i,b_m)$があると，

$$P(a_i) = \sum_{j=1}^{m} P(a_i, b_j).$$

となる．この計算を *marginalization*（周辺化）といい，変数 B は P(A,B)から周辺化されたという（この結果 P(A)になる）．表記は，

$$P(A) = \sum_{B} P(A,B).$$

となる．表 1.2 から B を周辺化すると，

$$P(A) = (0.16 + 0.12 + 0.12, 0.24 + 0.28 + 0.08) = (0.4, 0.6),$$

となる．A を周辺化すると，

$$P(B) = (0.16 + 0.24, 0.12 + 0.28, 0.12 + 0.08) = (0.4, 0.4, 0.2).$$

となる．

- 定理 1.4（変数のための Bayes'ルール）

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A,B)}{\sum_B P(A,B)},$$

別の変数 C で条件付けされると，

$$P(B \mid A, C) = \frac{P(A \mid B, C) P(B \mid C)}{P(A \mid C)} = \frac{P(A, B \mid C)}{\sum_B P(A, B \mid C)}.$$

となる．

- 前述のルールを P(A),P(B),P(A|B)に対して適用すると，表 1.4 の P(B|A)が得られる．

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} = \begin{array}{|c|cc|} \hline & a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & \frac{0.4 \cdot 0.4}{0.4} & \frac{0.6 \cdot 0.4}{0.6} \\ b_2 & \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.4} & \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.6} \\ b_3 & \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.4} & \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.6} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|cc|} \hline & a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & 0.4 & 0.4 \\ b_2 & 0.3 & 0.47 \\ b_3 & 0.3 & 0.13 \\ \hline \end{array}$$

Table 1.4. The conditional probability $P(B \mid A)$ obtained by applying Bayes' rule to $P(A \mid B)$ in Table 1.1, $P(A) = (0.4, 0.6)$, and $P(B) = (0.4, 0.4, 0.2)$. Note that the probabilities over B sum to 1 for each state of A.

- **定義 1.3（変数の条件付き独立）**

  変数 B の条件で以下が成り立つ場合，変数 A と C は条件付き独立であるという．

$$P(a_i \mid c_k, b_j) = P(a_i \mid b_j)$$

  今後は，P(A | C,B)=P(A | B)とも記す．

- B 条件で A と C が条件付き独立である場合，定理 1.3 は単純化できる．

$$P(A, C \mid B) = P(A \mid B, C) P(C \mid B) = P(A \mid B) P(C \mid B).$$

$$P(a_i, c_k \mid b_j) = P(a_i \mid b_j) P(c_k \mid b_j).$$

  例えば，P(A | B)と P(C | B)（表 1.1 と 1.5）を掛け合わせると，表 1.6 の P(A,C | B)を得る．

	b_1	b_2	b_3
c_1	0.2	0.9	0.3
c_2	0.05	0.05	0.2
c_3	0.75	0.05	0.5

Table 1.5. The conditional probability table $P(C \mid B)$ for the ternary variable C given the ternary variable B.

$$P(A,C \mid B) = P(A \mid B)P(C \mid B)$$

=

	b_1	b_2	b_3
c_1	$(0.2 \cdot 0.4, 0.2 \cdot 0.6)$	$(0.9 \cdot 0.3, 0.9 \cdot 0.7)$	$(0.3 \cdot 0.6, 0.3 \cdot 0.4)$
c_2	$(0.05 \cdot 0.4, 0.05 \cdot 0.6)$	$(0.05 \cdot 0.3, 0.05 \cdot 0.7)$	$(0.2 \cdot 0.6, 0.2 \cdot 0.4)$
c_3	$(0.75 \cdot 0.4, 0.75 \cdot 0.6)$	$(0.05 \cdot 0.3, 0.05 \cdot 0.7)$	$(0.5 \cdot 0.6, 0.5 \cdot 0.4)$

=

	b_1	b_2	b_3
c_1	$(0.08, 0.12)$	$(0.27, 0.63)$	$(0.18, 0.12)$
c_2	$(0.02, 0.03)$	$(0.015, 0.035)$	$(0.12, 0.08)$
c_3	$(0.3, 0.45)$	$(0.015, 0.035)$	$(0.3, 0.2)$

Table 1.6. If A and C are conditionally independent given B, then $P(A,C \mid B)$ can be found by multiplying $P(A \mid B)$ and $P(C \mid B)$ as specified in Table 1.1 and Table 1.5, respectively.

1.3.1 確率の表を用いた計算：例

- 変数 A，B，C があり，表 1.7 の確率があるとする．$A=a_2$，$C=c_1$ で $P(B|a_2,c_1)$の確率を計算したいとする．

	b_1	b_2	b_3
a_1	(0, 0.05, 0.05)	(0.05, 0.05, 0)	(0.05, 0.05, 0.05)
a_2	(0.1, 0.1, 0)	(0.1, 0, 0.1)	(0.2, 0, 0.05)

Table 1.7. A joint probability table for the variables A, B, and C. The three numbers in each entry correspond to the states c_1, c_2, and c_3.

まず $A=a_2$，$C=c_1$ の部分に注目すると，

$$P(a_2, B, c_1) = (0.1, 0.1, 0.2). \tag{1.2}$$

となる．$P(B|a_2,c_1)$を計算するために定理 1.4 を用いる．

$$P(B \mid a_2, c_1) = \frac{P(a_2, B, c_1)}{P(a_2, c_1)} = \frac{P(a_2, B, c_1)}{\sum_B P(a_2, B, c_1)}. \tag{1.3}$$

式（1.2）から B を周辺化すると，

$$P(a_2, c_1) = 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4.$$

式（1.3）の割り算を行うと，

$$P(B \mid a_2, c_1) = \left(\frac{0.1}{0.4}, \frac{0.1}{0.4}, \frac{0.2}{0.4}\right) = (0.25, 0.25, 0.5).$$

となる．

- A=a_2でP(B|a_2,C)を計算したいとすると，

$$P(B \mid a_2, C) = \frac{P(a_2, B, C)}{P(a_2, C)} = \frac{P(a_2, B, C)}{\sum_B P(a_2, B, C)}. \quad (1.4)$$

を用いる．P(a_2,C)は表1.8からBを周辺化することで得られる．

$$P(a_2, C) = (0.1 + 0.1 + 0.2, 0.1 + 0 + 0, 0 + 0.1 + 0.05) = (0.4, 0.1, 0.15), \quad (1.5)$$

これを式（1.4）に代入すると表1.9の結果を得る．

	b_1	b_2	b_3
c_1	0.1	0.1	0.2
c_2	0.1	0	0
c_2	0	0.1	0.05

Table 1.8. The probability table $P(a_2, B, C)$ that corresponds to the part of the probability table in Table 1.8 restricted to $A = a_2$.

$$P(B \mid a_2, C) = \begin{array}{|c|ccc|} \hline & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline c_1 & \frac{0.1}{0.4} & \frac{0.1}{0.4} & \frac{0.2}{0.4} \\ c_2 & \frac{0.1}{0.1} & \frac{0}{0.1} & \frac{0}{0.1} \\ c_2 & \frac{0}{0.15} & \frac{0.1}{0.15} & \frac{0.05}{0.15} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|ccc|} \hline & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline c_1 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ c_2 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ \hline \end{array}$$

Table 1.9. The calculation of $P(B \mid a_2, C)$ using $P(a_2, B, C)$ (Table 1.1) and $P(a_2, C)$ (equation (1.5)).