

1.3 変数のための確率計算法

- a_1, \dots, a_n の状態がある変数 A については状態が不確定であることを, 確率分布 $P(A)$ を用いて以下のように示す.

$$P(A) = (x_1, \dots, x_n); \quad x_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n = 1,$$

x_i は A が a_i である確率.

- もし B が b_1, \dots, b_n の状態をもっていたとすると,

$$\sum_{i=1}^n P(A = a_i | B = b_j) = 1 \text{ for each } b_j.$$

表 1.1 に例を示す.

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.4	0.3	0.6
a_2	0.6	0.7	0.4

Table 1.1. An example of a conditional probability table $P(A|B)$ for the binary variable A given the ternary variable B . Note that for each state of B the probabilities of A sum up to 1.

- 変数 A と B の (a_i, b_j) に対し, $P(A, B)$ は $A = a_i$ で $B = b_j$ である確率を示す. A と B は排他的であり, 包括的であるため, 以下が成り立つ.

$$P(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(A = a_i, B = b_j) = 1.$$

表 1.2 に例を示す.

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.16	0.12	0.12
a_2	0.24	0.28	0.08

Table 1.2. An example of a joint probability table $P(A, B)$ for the binary variable A and the ternary variable B . Note that the sum of all entries is 1.

- 式(1.1)を適用すると以下が成り立つ.

$$P(a_i | b_j)P(b_j) = P(a_i, b_j).$$

- $P(B)=(0.4,0.4,0.2)$ だとすると、表 1.2 は表 1.1 に対して、前述の公式を用いた結果となる。

$$P(A, B) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.4 \cdot 0.4 & 0.3 \cdot 0.4 & 0.6 \cdot 0.2 \\ \hline a_2 & 0.6 \cdot 0.4 & 0.7 \cdot 0.4 & 0.4 \cdot 0.2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.16 & 0.12 & 0.12 \\ \hline a_2 & 0.24 & 0.28 & 0.08 \\ \hline \end{array}$$

Table 1.3. The joint probability table $P(A, B)$ in Table 1.2 can be found by multiplying $P(B) = (0.4, 0.4, 0.2)$ by $P(A|B)$ in Table 1.1.

- 定理 1.3 (変数の基本ルール)

$$P(A, B) = P(A|B)P(B),$$

別の変数 C によって条件付けがされていれば,

$$P(A, B|C) = P(A|B, C)P(B|C).$$

となる。

- 確率 $P(A, B)$ の表から、 A の各状態 a_i で起きる B の結果を考慮し、確率 $P(A)$ を算出することができる。 A が状態 a_i である場合が m 通りあるとする。つまり、相互に排他である $(a_i, b_1), \dots, (a_i, b_m)$ があると,

$$P(a_i) = \sum_{j=1}^m P(a_i, b_j).$$

となる。この計算を周辺化といい、変数 B は $P(A, B)$ から周辺化されたという (この結果 $P(A)$ になる)。表記は,

$$P(A) = \sum_B P(A, B).$$

となる。表 1.2 から B を周辺化すると,

$$P(A) = (0.16 + 0.12 + 0.12, 0.24 + 0.28 + 0.08) = (0.4, 0.6),$$

となる。 A を周辺化すると,

$$P(B) = (0.16 + 0.24, 0.12 + 0.28, 0.12 + 0.08) = (0.4, 0.4, 0.2).$$

となる。

- 定理 1.4 (変数のための Bayes' ルール)

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A, B)}{\sum_B P(A, B)},$$

別の変数 C で条件付けされると,

$$P(B|A,C) = \frac{P(A|B,C)P(B|C)}{P(A|C)} = \frac{P(A,B|C)}{\sum_B P(A,B|C)}$$

となる.

- 前述のルールを $P(A), P(B), P(A|B)$ に対して適用すると, 表 1.4 の $P(B|A)$ が得られる.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & \frac{0.4 \cdot 0.4}{0.4} & \frac{0.6 \cdot 0.4}{0.6} \\ b_2 & \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.4} & \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.6} \\ b_3 & \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.4} & \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.6} \end{array} = \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & 0.4 & 0.4 \\ b_2 & 0.3 & 0.47 \\ b_3 & 0.3 & 0.13 \end{array}$$

Table 1.4. The conditional probability $P(B|A)$ obtained by applying Bayes' rule to $P(A|B)$ in Table 1.1, $P(A) = (0.4, 0.6)$, and $P(B) = (0.4, 0.4, 0.2)$. Note that the probabilities over B sum to 1 for each state of A .

- **定義 1.3 (変数の条件付き独立)**
変数 B の条件で以下が成り立つ場合, 変数 A と C は条件付き独立であるという.

$$P(a_i | c_k, b_j) = P(a_i | b_j)$$

今後は, $P(A|C,B)=P(A|B)$ とも記す.

- B 条件で A と C が条件付き独立である場合, 定理 1.3 は単純化できる.

$$P(A,C|B) = P(A|B,C)P(C|B) = P(A|B)P(C|B).$$

$$P(a_i, c_k | b_j) = P(a_i | b_j)P(c_k | b_j).$$

例えば, $P(A|B)$ と $P(C|B)$ (表 1.1 と 1.5) を掛け合わせると, 表 1.6 の $P(A,C|B)$ を得る.

	b_1	b_2	b_3
c_1	0.2	0.9	0.3
c_2	0.05	0.05	0.2
c_3	0.75	0.05	0.5

Table 1.5. The conditional probability table $P(C|B)$ for the ternary variable C given the ternary variable B .

$$P(A, C | B) = P(A | B)P(C | B)$$

	b_1	b_2	b_3
c_1	(0.2 · 0.4, 0.2 · 0.6)	(0.9 · 0.3, 0.9 · 0.7)	(0.3 · 0.6, 0.3 · 0.4)
c_2	(0.05 · 0.4, 0.05 · 0.6)	(0.05 · 0.3, 0.05 · 0.7)	(0.2 · 0.6, 0.2 · 0.4)
c_3	(0.75 · 0.4, 0.75 · 0.6)	(0.05 · 0.3, 0.05 · 0.7)	(0.5 · 0.6, 0.5 · 0.4)

	b_1	b_2	b_3
c_1	(0.08, 0.12)	(0.27, 0.63)	(0.18, 0.12)
c_2	(0.02, 0.03)	(0.015, 0.035)	(0.12, 0.08)
c_3	(0.3, 0.45)	(0.015, 0.035)	(0.3, 0.2)

Table 1.6. If A and C are conditionally independent given B , then $P(A, C | B)$ can be found by multiplying $P(A | B)$ and $P(C | B)$ as specified in Table 1.1 and Table 1.5, respectively.

1.3.1 確率の表を用いた計算：例

- 変数 A, B, C があり、表 1.7 の確率があるとする。 $A=a_2, C=c_1$ で $P(B|a_2, c_1)$ の確率を計算したいとする。

	b_1	b_2	b_3
a_1	(0, 0.05, 0.05)	(0.05, 0.05, 0)	(0.05, 0.05, 0.05)
a_2	(0.1, 0.1, 0)	(0.1, 0, 0.1)	(0.2, 0, 0.05)

Table 1.7. A joint probability table for the variables A, B , and C . The three numbers in each entry correspond to the states c_1, c_2 , and c_3 .

まず $A=a_2, C=c_1$ の部分に注目すると、

$$P(a_2, B, c_1) = (0.1, 0.1, 0.2). \quad (1.2)$$

となる。 $P(B|a_2, c_1)$ を計算するために定理 1.4 を用いる。

$$P(B | a_2, c_1) = \frac{P(a_2, B, c_1)}{P(a_2, c_1)} = \frac{P(a_2, B, c_1)}{\sum_B P(a_2, B, c_1)}. \quad (1.3)$$

式 (1.2) から B を周辺化すると、

$$P(a_2, c_1) = 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4.$$

式 (1.3) の割り算を行うと、

$$P(B | a_2, c_1) = \left(\frac{0.1}{0.4}, \frac{0.1}{0.4}, \frac{0.2}{0.4} \right) = (0.25, 0.25, 0.5).$$

となる。

- $A=a_2$ で $P(B|a_2,C)$ を計算したいとすると,

$$P(B|a_2,C) = \frac{P(a_2,B,C)}{P(a_2,C)} = \frac{P(a_2,B,C)}{\sum_B P(a_2,B,C)}. \quad (1.4)$$

を用いる. $P(a_2,C)$ は表 1.8 から B を周辺化することで得られる.

$$P(a_2,C) = (0.1+0.1+0.2, 0.1+0+0, 0+0.1+0.05) = (0.4, 0.1, 0.15), \quad (1.5)$$

これを式 (1.4) に代入すると表 1.9 の結果を得る.

	b_1	b_2	b_3
c_1	0.1	0.1	0.2
c_2	0.1	0	0
c_2	0	0.1	0.05

Table 1.8. The probability table $P(a_2, B, C)$ that corresponds to the part of the probability table in Table 1.8 restricted to $A = a_2$.

$$P(B|a_2,C) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline c_1 & \frac{0.1}{0.4} & \frac{0.1}{0.4} & \frac{0.2}{0.4} \\ c_2 & \frac{0.1}{0.1} & \frac{0}{0.1} & \frac{0}{0.1} \\ c_2 & \frac{0}{0.15} & \frac{0.1}{0.15} & \frac{0.05}{0.15} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline c_1 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ c_2 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{array}$$

Table 1.9. The calculation of $P(B|a_2,C)$ using $P(a_2,B,C)$ (Table 1.1) and $P(a_2,C)$ (equation (1.5)).