

物理数学 II

unknown

2010 年 5 月 5 日

目次

第 1 章	偏微分方程式と Fourier 変換	1
1.1	偏微分方程式	1
1.2	熱伝導方程式	2
1.2.1	例 1 熱伝導	3
1.2.2	例 2 ランダムウォーク	4
1.2.3	Fourier 変換による解法	5
1.3	波動方程式	7
1.3.1	例	8
1.3.2	1 次元波動方程式	9
1.3.3	3 次元波動方程式	12
1.4	Poisson 方程式	13
1.5	Laplacian と特殊函数	16
1.5.1	Laplacian	17
1.5.2	円対称	18
1.5.3	球対称	21
1.5.4	球対称 $1/r$ ポテンシャル	24
1.A	Fourier 級数・Fourier 変換・デルタ函数	25
1.A.1	Fourier 級数	25
1.A.2	Fourier 変換	27
1.A.3	デルタ函数	27
第 2 章	特殊函数	31
2.1	直交多項式としての特殊函数	31
2.1.1	函数の内積	31
2.1.2	直交函数系	33
2.1.3	完全性について	34
2.1.4	直交多項式	36

2.1.5	直交多項式の一意性	37
2.1.6	直交多項式の完全性	38
2.1.7	直交多項式の Rodrigues の公式による表現	38
2.1.8	直交多項式の満たす微分方程式	41
2.1.9	直交多項式の規格化	49
2.1.10	直交多項式の母函数	51
2.1.11	直交多項式の漸化式	54
2.2	Legendre 陪函数	56
2.2.1	定義	56
2.2.2	性質	57
2.2.3	漸化式	58
2.2.4	微分方程式	58
2.3	球面調和函数	59
2.4	ガンマ函数	60
2.5	Bessel 函数	61
2.5.1	母函数表示	61
2.5.2	性質	62
2.5.3	一般の次数の Bessel 函数	63
2.5.4	漸化式	63
2.5.5	微分方程式	63
2.5.6	円柱函数	64
2.5.7	零点と直交性	65
2.5.8	変形 Bessel 函数	66
2.6	超幾何函数	66
2.6.1	超幾何函数の系統図	66
2.6.2	Pochhammer の一般化された超幾何函数	67
2.6.3	Gauss の超幾何函数	68
2.6.4	Kummer の合流型超幾何函数	69

第 1 章

偏微分方程式と Fourier 変換

§ 1.1 偏微分方程式

まず，偏微分方程式の一般論について簡単に述べる．

x, y の函数 $u(x, y)$ に対して，

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}, \quad (1.1.1)$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} \quad (1.1.2)$$

⋮

などを偏微分という．

定義 1.1 偏微分方程式とは，未知函数 $u(x, y)$ とその導函数 u_x, u_y, u_{xx}, \dots との関係式

$$F(x, y, u, u_x, u_y, \dots) = 0 \quad (1.1.3)$$

のことである．

一般には変数は x, y, z, \dots と多変数で，未知函数も $u_1(x, y, z, \dots), u_2(x, y, z, \dots), \dots$ のようになる．さらに区分として，

$$\begin{cases} \text{一階} & F = F(x, y, u, u_x, u_y) \\ \text{二階} & F = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \end{cases}$$

や

$$\begin{cases} \text{線型} & F \text{ は } u \text{ や } v \text{ の導函数の一次式} \\ \text{非線型} & \text{でない} \end{cases}$$

がある．

常微分方程式（1 変数のみ）との間には大きな違いがある．

常微分方程式の一般解

$f = f(x)$ としたとき，具体的な常微分方程式とその解は

$$f''(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{6}x^3 + Ax + B \quad (1.1.4)$$

$$f'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = Ce^x \quad (1.1.5)$$

のようになる．ここで A, B, C は任意定数である．

偏微分方程式の一般解

対して $u = u(x, y)$ としたとき，具体的な偏微分方程式とその解は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \quad \Longrightarrow \quad u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 + A(y)x + B(y) \quad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \quad \Longrightarrow \quad u(x, y) = C(y)e^x \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u(x, y) = D(x - y) \quad (1.1.8)$$

のようになる．ここで A, B, C, D は括弧内の変数の任意関数である．偏微分方程式は，常微分方程式と違い，一般解の中にも任意関数を含むという特徴がある．

一般論はここまでとし，以降は具体例を見ていく．

§ 1.2 熱伝導方程式

定義 1.2 熱伝導方程式とは， $\nu > 0$ として

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (1.2.1)$$

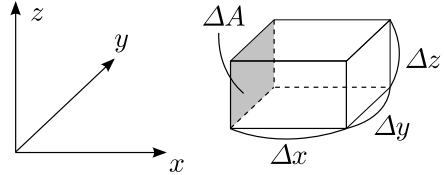
という形の変微分方程式で，より一般的には

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \nu \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.2)$$

という形である．

1.2.1 例 1 熱伝導

xyz 空間内に、各軸方向へ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の長さを持った直方体の物質を考える．微小体積を ΔV ，物質中の温度を $T = T(t, x, y, z)$ とする．このような状況に対して，熱伝導方程式を導出する．



ステップ (i) 時間 Δt の間に位置 x の面 $\Delta A (= \Delta y \Delta z)$ を通る熱量は

$$\Delta q_x = - \underbrace{k}_{\text{熱伝導率}} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{\text{温度勾配}} \Delta A \Delta t \quad (1.2.3)$$

である．同様に， $x + \Delta x$ から入ってくる熱量は

$$\begin{aligned} \Delta q_{x+\Delta x} &= +k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \Delta A \Delta t \\ &= k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_x \Delta x \right) \Delta A \Delta t + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

である．以上を合わせれば，

$$\Delta Q_x = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \underbrace{\Delta x \Delta A}_{\Delta V} \Delta t. \quad (1.2.5)$$

y, z 方向も同様に求められるので，全体での熱量変化は

$$\Delta Q = k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \cdot \Delta V \Delta t \quad (1.2.6)$$

となる．

ステップ (ii) 一方で，温度上昇 ΔT と熱量変化 ΔQ との関係は

$$\Delta Q = \underbrace{C}_{\text{比熱}} \underbrace{\rho}_{\text{密度}} \Delta V \Delta T \quad (1.2.7)$$

である．

ステップ (iii) (1.2.6) 式, (1.2.7) 式より,

$$C\rho\Delta T = k\nabla^2 T\Delta t. \quad (1.2.8)$$

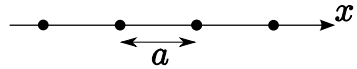
$\Delta t \rightarrow 0$ として,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{k}{C\rho}\right)}_{\substack{\text{熱拡散率} \\ (\text{m}^2/\text{s})}} \nabla^2 T \quad (1.2.9)$$

となる.

1.2.2 例2 ランダムウォーク

1次元の格子 (x 軸, 間隔 a) を考える.
時間 Δt ごとにひとつ隣の格子へ移るとする.
時刻 t に位置 x にいる確率を $P(t, x)$ とすると,



$$P(t + \Delta t, x) = \frac{P(t, x - a) + P(t, x + a)}{2} \quad (1.2.10)$$

$$\Rightarrow P(t + \Delta t, x) - P(t, x) = \frac{P(t, x + a) + P(t, x - a) - 2P(t, x)}{2} \quad (1.2.11)$$

という関係式が成立する. ここで, $a \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ の極限をとって問題を連続的にすると, この式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} a^2 + \mathcal{O}(a^3) \quad (1.2.12)$$

と変形できる. さらに式変形すれば, 熱伝導方程式と同じ型の

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{a^2}{2\Delta t}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.2.13)$$

という偏微分方程式が得られる. ただし $a, \Delta t$ の極限をとるときに, 式を見れば分かるように a^2 と Δt が同じ速さで 0 へ向かう極限をとる必要がある.

1.2.3 Fourier 変換による解法

(Fourier 変換については 1.A 節参照¹⁾)

1次元の熱伝導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) \quad (1.2.14)$$

で考える．初期条件を

$$\varphi(x, t) \Big|_{t=0} = \delta(x) \quad (1.2.15)$$

とする．この問題を，Fourier 変換

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x, t) e^{-ipx} \\ \varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\varphi}(p, t) e^{ipx} \end{array} \right. \quad (1.2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x, t) e^{-ipx} \\ \varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\varphi}(p, t) e^{ipx} \end{array} \right. \quad (1.2.17)$$

によって解く．

(1.2.17) 式を (1.2.14) 式へ代入する：

$$\int \frac{dp}{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) e^{ipx} = \nu \int \frac{dp}{2\pi} \tilde{\varphi}(p, t) (-p^2) e^{ipx}. \quad (1.2.18)$$

両辺に e^{-iqx} をかけて x で積分する：

$$\int dx \int \frac{dp}{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) e^{i(p-q)x} = \nu \int dx \int \frac{dp}{2\pi} \tilde{\varphi}(p, t) (-p^2) e^{i(p-q)x}. \quad (1.2.19)$$

ここで

$$\int dx e^{i(p-q)x} = 2\pi \delta(p-q) \quad (1.2.20)$$

を用いれば，上の式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}(q, t) = \nu (-q^2) \tilde{\varphi}(q, t) \quad (1.2.21)$$

1) 授業ではここで Fourier 変換の解説を設けていたようですが，編集の都合上章末に回します．

と、容易に解くことのできる微分方程式となった。この解は

$$\tilde{\varphi}(q, t) = C(q)e^{-\nu q^2 t} \quad (1.2.22)$$

であり、 $C(q)$ は任意函数である。この函数は

$$\tilde{\varphi}(q, 0) = C(q) \quad (1.2.23)$$

と初期条件 (1.2.15) によって定める。実際に計算して

$$\tilde{\varphi}(q, 0) = \int dx \underbrace{\varphi(x, 0)}_{\delta(x)} e^{-iqx} = 1 \quad (1.2.24)$$

$$\Rightarrow C(q) = 1 (\text{定数}) \quad (1.2.25)$$

$$\therefore \tilde{\varphi}(q, t) = e^{-\nu q^2 t}. \quad (1.2.26)$$

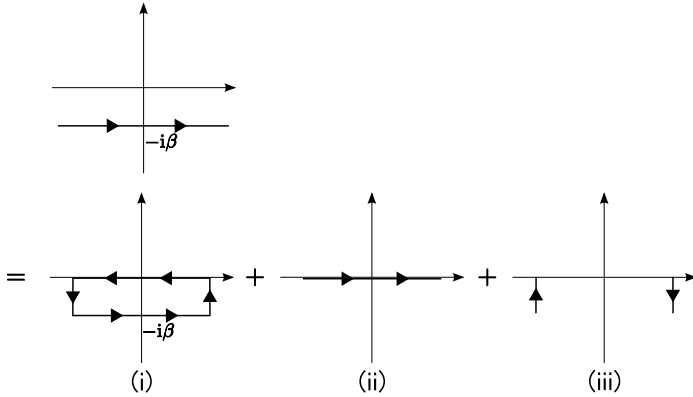
逆変換して $\varphi(x, t)$ へ戻すと、

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int dp \tilde{\varphi}(p, t) e^{ipx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp \exp \left[-\nu t \left(p - \frac{ix}{2\nu t} \right)^2 - \frac{x^2}{4\nu t} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2}{4\nu t} \right) \int dp \exp \left[-\nu t \left(p - \frac{ix}{2\nu t} \right)^2 \right]. \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\nu t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4\nu t} \right) \underbrace{\int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} dz e^{-z^2}}_{(*)} \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

最終行では

$$\beta := \sqrt{\nu t} \cdot \frac{x}{2\nu t}, \quad z := \sqrt{\nu t} p - \beta \quad (1.2.28)$$

として変数変換した。(*)の部分の積分は



のような経路へ分解し，各積分は

$$(i) = 0 \quad (1.2.29)$$

$$(ii) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (1.2.30)$$

$$(iii) = \int_{-\beta}^0 e^{-(R+iy)^2} i dy + \int_0^{-\beta} e^{-(R+iy)^2} i dy \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0 \quad (1.2.31)$$

とできるので，

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right) \quad (1.2.32)$$

という解が得られる．

補足 (1.2.32) 式は $t = 0$ で定義できないが $t \rightarrow 0$ の極限をとれば $\rho_\alpha := 2\sqrt{\nu t}$ によって

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \delta(x) \quad (1.2.33)$$

と，初期条件と一致する．

§ 1.3 波動方程式

定義 1.3 波動方程式とは，

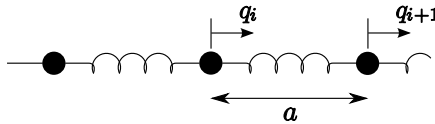
$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) \quad (1.3.1)$$

のような形をした偏微分方程式である．より一般的には

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.2)$$

のような形となる．どちらの式でも， v は波の伝播速度である．

1.3.1 例



自然長 a ，ばね定数 k のばねで質量 m の質点が直線につながっている系を考える．全体が自然長の状態からの，時刻 t における i 番目の質点の変位を $q_i(t)$ とすれば，Newton の運動方程式から

$$m\ddot{q}_i(t) = k(q_{i+1} - q_i) - k(q_i - q_{i-1}) = k(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) \quad (1.3.3)$$

という式が導かれる．ここで， a を微小として連続的に扱えば，

$$q_i(t) \quad \rightarrow \quad q(x, t) \quad (1.3.4)$$

$$q_{i\pm 1}(t) \quad \rightarrow \quad q(x \pm a, t) = q(x, t) \pm \frac{\partial q}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} a^2 + \mathcal{O}(a^3) \quad (1.3.5)$$

とおける．すると (1.3.3) 式は

$$\left(\frac{m}{ka^2} \right) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (1.3.6)$$

という波動方程式へ変更できる．伝播速度は

$$v^2 = \frac{ka^2}{m} \quad (1.3.7)$$

である．

1.3.2 1次元波動方程式

一般解 (d'Alembert の解法による導出)

波動方程式の一般解を求める．1次元波動方程式

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1.3.8)$$

の場合は容易に解くことができる．

まず

$$\begin{cases} \xi := x - vt \\ \eta := x + vt \end{cases} \quad (1.3.9)$$

$$(1.3.10)$$

と変数変換を行う．すると微分演算子は

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = v \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{cases} \quad (1.3.11)$$

$$(1.3.12)$$

と変換されるので，波動方程式 (1.3.8) は

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 - \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \right] \varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

となる．この微分方程式は容易に解くことができる．まず ξ で積分して，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = f(\eta). \quad (1.3.14)$$

次に η で積分して，

$$\varphi = \underbrace{\int f(\eta) d\eta}_{\text{改めて } f(\eta) \text{ とおく}} + g(\xi). \quad (1.3.15)$$

ただし f, g 共に変数のみを指定した任意函数である．以上より

$$\varphi = f(\eta) + g(\xi)$$

$$= f(x + vt) + g(x - vt) \quad (1.3.16)$$

という解が得られた。 $f(x + vt)$ は x 軸負方向へ、 $g(x - vt)$ は正方向へ速度 v で伝播する波の式である。これらの具体的な形は条件を付することによって定めることになる。

初期条件の一例

例えば、初期条件を

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = a(x), & (1.3.17) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = b(x) & (1.3.18) \end{cases}$$

とおくと、これらの式は

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = a(x), & (1.3.19) \\ vf'(x) - vg'(x) = b(x) & (1.3.20) \end{cases}$$

となるので、まず (1.3.20) 式より、

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{v} \int_0^x b(y) dy + C. \quad (1.3.21)$$

(1.3.19) 式と合わせて、任意関数は

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \left[a(x) + \frac{1}{v} \int_0^x b(y) dy + C \right] & (1.3.22) \\ g(x) = \frac{1}{2} \left[a(x) - \frac{1}{v} \int_0^x b(y) dy - C \right] & (1.3.23) \end{cases}$$

と定められるので、全体で

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= f(x + vt) + g(x - vt) \\ &= \frac{1}{2} \left[a(x + vt) + a(x - vt) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} b(y) dy \right] \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

となる。

一般解 (Fourier 変換による導出)

一般解を , Fourier 変換

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x, t) e^{-ipx} \\ \varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\varphi}(p, t) e^{ipx} \end{array} \right. \quad (1.3.25)$$

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\varphi}(p, t) e^{ipx} \quad (1.3.26)$$

によって導出する . 熱伝導方程式のときの手法 (1.2.3 節) と同様である . (1.3.26) 式を波動方程式 (1.3.8) へ代入して ,

$$\int \frac{dp}{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} e^{ipx} = v^2 \int \frac{dp}{2\pi} \tilde{\varphi}(-p^2) e^{ipx}. \quad (1.3.27)$$

e^{-ipx} をかけて x で積分する . 両辺の一部が (1.2.20) 式によりデルタ函数となるので ,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} = -v^2 q^2 \tilde{\varphi} \quad (1.3.28)$$

という簡単な偏微分方程式になる . 解は

$$\tilde{\varphi} = \tilde{c}_1(q) e^{-ivqt} + \tilde{c}_2(q) e^{ivqt} \quad (1.3.29)$$

であり (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 は任意函数) , 逆変換して

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int dp \tilde{\varphi}(p, t) e^{ipx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp \tilde{c}_1(p) e^{ip(x-vt)} + \frac{1}{2\pi} \int dp \tilde{c}_2(p) e^{ip(x+vt)}. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

ゆえに , $\tilde{c}_1(p), \tilde{c}_2(p)$ の Fourier 逆変換

$$c_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp \tilde{c}_i(p) e^{ipx} \quad (1.3.31)$$

を用いれば

$$\varphi(x, t) = c_1(x - vt) + c_2(x + vt) \quad (1.3.32)$$

と , 一般解が得られる .

1.3.3 3次元波動方程式

一般解

3次元での波動方程式

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.33)$$

の一般解も，Fourier 変換によって求めることができる．3次元での Fourier 変換

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \varphi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \end{array} \right. \quad (1.3.34)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.3.35)$$

を同様に代入していけば，最終的に

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} = -v^2 |\mathbf{p}|^2 \tilde{\varphi} \quad (1.3.36)$$

という微分方程式が得られ，解は

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) = \tilde{c}_1(\mathbf{p}) e^{-iv|\mathbf{p}|t} + \tilde{c}_2(\mathbf{p}) e^{iv|\mathbf{p}|t} \quad (1.3.37)$$

$$\therefore \varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[c_1(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - v|\mathbf{p}|t)} + c_2(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + v|\mathbf{p}|t)} \right] \quad (1.3.38)$$

Klein-Gordon 方程式

静止質量 m の相対論的な粒子のエネルギー

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.3.39)$$

に，量子化

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \quad (1.3.40)$$

を用いて整理すれば，

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left[\nabla^2 - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi \quad (1.3.41)$$

という方程式となる． $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ は Klein-Gordon 場というスカラー場である．この偏微分方程式を Klein-Gordon 方程式といい，相対論的量子力学の基礎方程式である．

§ 1.4 Poisson 方程式

定義 1.4 $\varphi(\boldsymbol{x})$ と $\rho(\boldsymbol{x})$ について，偏微分方程式

$$\nabla^2 \varphi(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x}) \quad (1.4.1)$$

を Poisson 方程式という．

デルタ函数の場合

まず，具体的に

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (1.4.2)$$

の場合について解を求める．Fourier 変換

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad (1.4.3)$$

を (1.4.1) 式へ代入すると，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) (-|\boldsymbol{p}|^2) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\ (\text{右辺}) &= -\delta(\boldsymbol{x}) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

となるので，

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) (-|\boldsymbol{p}|^2) = -1 \quad (1.4.5)$$

$$\therefore \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2} \quad (1.4.6)$$

が解になる²⁾．Fourier 変換して

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad (1.4.7)$$

2) ただし $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = 0$ となるような C を加えてもよいという自由度がある．

であるが,

$$\int d^3p = \int_0^\infty p^2 dp \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \quad (1.4.8)$$

であるので,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 dp \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \times \frac{1}{|\mathbf{p}|^2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

一般の場合: 重ね合わせ

以上のように,

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (1.4.10)$$

に対して

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (1.4.11)$$

が得られた. 一般に

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (1.4.12)$$

のときは, 重ね合わせのようにして

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{y}) d^3y}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (1.4.13)$$

とすればよい.

線型代数とのアナロジー

線型代数との比較によって解が類推できる.

Poisson 方程式

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})$$

に対して, Green 関数によって解は

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d^3 y$$

と書ける. Green 関数は

$$\underbrace{\nabla^2}_A \underbrace{G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{A^{-1}} = \underbrace{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_I$$

を満たす.

ベクトルと行列による方程式

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

を \mathbf{u} についてとくと,

$$\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{v}$$

である. A^{-1} は

$$AA^{-1} = I$$

を満たす.

確認 (デルタ関数の性質)

Poisson 方程式

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}), \quad (1.4.14)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (1.4.15)$$

に対して解は

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \quad (1.4.16)$$

であった. では

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \right) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (1.4.17)$$

は本当なのか, 確認する.

$|\mathbf{x}| \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} &= \nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\nabla \cdot \mathbf{x}}{r^3} + (-\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ &= -\frac{3}{r^3} + (-\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$= 0 \quad (1.4.18)$$

$|\mathbf{x}| = 0$ のとき 近傍で半径 r の球で積分すると,

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \left(-\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} \right) &= \int_V d^3x \nabla \cdot \left(-\nabla \frac{1}{4\pi r} \right) \\ &= \int_V d^3x \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{4\pi r^3} \right) \\ &= \int_S \frac{\mathbf{x}}{4\pi r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S dS \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

§ 1.5 Laplacian と特殊函数

さまざまな偏微分方程式に Laplacian が登場する：

熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \varphi \quad (1.5.1)$$

波動方程式

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi \quad (1.5.2)$$

Laplace 方程式 (上 2 つの定常状態)

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.5.3)$$

Poisson 方程式

$$\nabla^2 \varphi = -\rho(\mathbf{x}) \quad (1.5.4)$$

Helmholtz 方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0 \quad (1.5.5)$$

Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (1.5.6)$$

1.5.1 Laplacian

1 次元

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (1.5.7)$$

2 次元

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.5.8)$$

極座標 (ρ, ϕ) :

$$\nabla^2 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (1.5.9)$$

3 次元

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.5.10)$$

円柱座標 (ρ, ϕ, z) :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.5.11)$$

球座標 (r, θ, ϕ) :

$$\nabla^2 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r} + \frac{1}{r^2} \hat{\Omega}(\theta, \phi). \quad (1.5.12)$$

ただし

$$\hat{\Omega}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1.5.13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\cos \theta)} \left[\sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial(\cos \theta)} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (1.5.14)$$

以降では、波動方程式 Helmholtz 方程式を中心に、 ∇^2 と特殊函数の関係を導く。波動方程式

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi \quad (1.5.15)$$

について、 $\varphi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ の形の解を仮定すれば、

$$-\frac{\omega^2}{v^2} u(\mathbf{x})e^{i\omega t} = \nabla^2 u(\mathbf{x})e^{i\omega t} \quad (1.5.16)$$

$$\therefore \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) u(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.5.17)$$

と、 $k^2 = \omega^2/v^2$ とした Helmholtz 方程式が得られた。

1.5.2 円対称

まず、円柱のように解が円対称な場合を考える（例：太鼓の振動）:

$$(\nabla^2 + k^2) u(\rho, \phi) = 0 \quad (1.5.18)$$

この場合は、Bessel 函数という特殊函数を用いることになる。

解について、変数分離の形を仮定する：

$$u(\rho, \phi) = f(\rho)g(\phi). \quad (1.5.19)$$

すると, Helmholtz 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right) f(\rho)g(\phi) = 0 \quad (1.5.20)$$

$$\Leftrightarrow f''g + \frac{1}{\rho}f'g + \frac{1}{\rho^2}fg'' + k^2fg = 0 \quad (1.5.21)$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 \frac{f''}{f} + \rho \frac{f'}{f} + k^2\rho^2 = -\frac{g''}{g} \quad (1.5.22)$$

と変形できる. 最後の式では左辺は ρ のみ, 右辺は ϕ のみの函数であるから, これらはある定数 h に等しくなる. そして g は

$$\frac{d^2g}{d\phi^2} = -hg \quad (1.5.23)$$

$$\therefore g(\phi) = Ce^{\pm\sqrt{-h}\phi} \quad (1.5.24)$$

となる.

$g(\phi)$ の形: $h < 0$ のとき

このとき, $g(\phi + 2\pi) = g(\phi)$ (一価性条件) が満たされないので不適.

$g(\phi)$ の形: $h > 0$ のとき

このとき, (1.5.24) 式は

$$g(\phi) = Ce^{\pm i\sqrt{h}\phi} \quad (1.5.25)$$

となる. これが $g(\phi + 2\pi) = g(\phi)$ を満たすので,

$$\sqrt{h} = m \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1.5.26)$$

$f(\rho)$ の満たす微分方程式とその解

(1.5.26) 式によって (1.5.22) 式を整理すれば,

$$\rho^2 \frac{d^2f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + (k^2\rho^2 - m^2)f = 0 \quad (1.5.27)$$

であるから, $k\rho =: x$ とおくと,

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + (x^2 - m^2)f = 0 \quad (1.5.28)$$

となる. これは次数 m の Bessel の微分方程式と呼ばれるもので, 解は m 次の Bessel 函数

$$J_m(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(m+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2s} \quad (1.5.29)$$

である. 以上より, 解は

$$f_m(\rho) = J_m(k\rho) \quad (1.5.30)$$

$$\Rightarrow u_m(\rho, \phi) = J_m(k\rho)e^{\pm im\phi} \quad (1.5.31)$$

$$\therefore \varphi_m(\rho, \phi, t) = J_m(k\rho)e^{\pm im\phi}e^{i\omega t}. \quad (1.5.32)$$

境界条件

円柱の境界条件 (例: 太鼓の端) で振動は 0 になるはずなので, 円柱の半径を R として

$$\varphi(\rho = R, \phi, t) = 0 \quad (1.5.33)$$

$$\Rightarrow J_m(kR) = 0 \quad (1.5.34)$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{R}j_{mn} \quad (j_{mn} \text{ は } J_m \text{ の零点のひとつ}) \quad (1.5.35)$$

$$\therefore \varphi_{mn}(\rho, \phi, t) = J_m\left(\frac{r}{R}j_{mn}\right)e^{\pm im\phi}e^{i\omega t}. \quad (1.5.36)$$

となる. 一般的には (m, n) の重ね合わせ

$$\varphi(\rho, \phi, t) = \sum_{m,n} C_{mn} J_m\left(\frac{r}{R}j_{mn}\right)e^{\pm im\phi}e^{i\omega t} \quad (1.5.37)$$

である.

補足: 変数分離について

解の形を初めから変数分離の形としたが, 果たしてこれは適切であったのか. つまり, 得られた解が一般的なものであるかを考える. 解には一価性条件

$u(\rho, \phi) = u(\rho, \phi + 2\pi)$ が要請されている．つまり ϕ に関して周期函数なので Fourier 級数展開が可能であり，

$$u(\rho, \phi) = \sum_m f_m(\rho) e^{im\phi}, \quad (1.5.38)$$

$$f_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\rho, \phi) e^{-im\phi} d\phi \quad (1.5.39)$$

とできる．これを Helmholtz 方程式へ代入して， ϕ に関する計算を先に行ってしまえば，

$$\sum_m \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + k^2 \right) f_m(\rho) e^{im\phi} = 0 \quad (1.5.40)$$

となる．ここに $e^{-in\phi}$ をかけて $-\pi \leq \phi \leq \pi$ で積分すると， e の積分に関して

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{i(m-n)\phi} = \delta_{mn} \quad (1.5.41)$$

であるから，結局

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + k^2 \right) f_n(\rho) = 0 \quad (1.5.42)$$

という式になる．これは，変数分離の時に導出した (1.5.28) 式を ρ^2 で割ったものになっていて，同じ方程式である．

今は変数分離の形としても一般的な解が得られたが，どのような場合に

$$u(x, y) = \sum_n f_n(x) g_n(y) \quad (1.5.43)$$

は成り立つのか．実は， $\{g_n(y)\}$ が完全系（後述）を成していれば必ずこのように書くことができる．上の例では， $g_n(\phi) = e^{in\phi}$ が完全系を成している．

1.5.3 球対称

今度は球面のような球対称な系を考える：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \hat{\Omega}(\theta, \phi) + k^2 \right] u(r, \theta, \phi) = 0 \quad (1.5.44)$$

この場合は，球面調和函数（Legendre 函数）と球 Bessel 函数が登場する．

変数分離

今回は

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (1.5.45)$$

と変数分離する。(後に出てくる $Y_l^m(\theta, \phi)$ が完全系を成すので, 正当化は後でできる。) 代入して整理すると,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + r^2 k^2 = -\frac{\hat{\Omega}Y}{Y} (=:\alpha) \quad (1.5.46)$$

となる。左辺は r のみ, 右辺は θ, ϕ のみの函数なので, 定数 α とおくことができる。

角度成分：球面調和函数

(1.5.46) 式より,

$$(\hat{\Omega} + \alpha)Y = 0. \quad (1.5.47)$$

一価性条件 $Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi)$ より Fourier 級数展開して,

$$Y(\theta, \phi) = \sum_m P^m(\theta) e^{im\phi}, \quad (1.5.48)$$

$$P^m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\theta, \phi) e^{-im\phi} d\phi. \quad (1.5.49)$$

(1.5.47) 式へ代入して ϕ に関して先に計算してしまうと,

$$\sum_m \left[\frac{\partial}{\partial(\cos\theta)} \left(\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial(\cos\theta)} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \alpha \right] P^m(\theta) e^{im\phi} = 0 \quad (1.5.50)$$

となる。前節と同様に $e^{-in\phi}$ をかけて $-\pi \leq \phi \leq \pi$ で積分すると,

$$\left[\frac{d}{d(\cos\theta)} \left(\sin^2\theta \frac{d}{d(\cos\theta)} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \alpha \right] P^m(\theta) = 0 \quad (1.5.51)$$

となる。 $z := \cos\theta$ とおくと, これは

$$\left[\frac{d}{dz} \left\{ (1-z^2) \frac{d}{dz} \right\} - \frac{m^2}{1-z^2} + \alpha \right] P^m(z) = 0 \quad (1.5.52)$$

という微分方程式になる．実は，物理的に意味のある α は

$$\alpha = l(l+1); \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \geq |m| \quad (1.5.53)$$

のみである．このときの微分方程式

$$\left[\frac{d}{dz} \left\{ (1-z^2) \frac{d}{dz} \right\} - \frac{m^2}{1-z^2} + l(l+1) \right] P_l^m(z) = 0 \quad (1.5.54)$$

を Legendre の陪微分方程式という． $m = 0$ のときは Legendre の微分方程式と呼ばれる．解 P_l^m は Legendre 陪函数といい， $m = 0$ の解 P_l は Legendre 多項式という．以上より，

$$\hat{\Omega}(\theta, \phi)Y(\theta, \phi) = -l(l+1)Y(\theta, \phi) \quad (1.5.55)$$

の解として，

$$Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta)e^{im\phi} \quad (1.5.56)$$

が得られた．これを球面調和函数という．

動径成分：球 Bessel 函数

$\alpha = l(l+1)$ としたので，(1.5.46) 式より

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + r^2 k^2 R = l(l+1)R \quad (1.5.57)$$

となる． $kr = x$ とすれば

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + 2x \frac{dR}{dx} + [x^2 - l(l+1)] R = 0 \quad (1.5.58)$$

という微分方程式になる．これは，Bessel の微分方程式 (1.5.28) に似ている．そこで， $R(x) = f(x)/\sqrt{x}$ とおくと，

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] f = 0 \quad (1.5.59)$$

となる．これは次数 $l + \frac{1}{2}$ の Bessel の微分方程式なので，解は

$$f(x) = J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (1.5.60)$$

である³⁾．ゆえに動径成分は

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (1.5.61)$$

となる．これは球 Bessel 函数と呼ばれる．

以上より， $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ の解は

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} C_{lm} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}_{\text{球 Bessel 函数}} \underbrace{Y_l^m(\theta, \phi)}_{\text{球面調和函数}} \quad (1.5.62)$$

重ね合わせ

$$= \sum_{l,m} C_{lm} \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \underbrace{P_l^m(\cos \theta)}_{\text{Legendre 函数}} e^{im\phi} \quad (1.5.63)$$

である．

1.5.4 球対称 $1/r$ ポテンシャル

3次元の定常状態 Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}) \quad (1.5.64)$$

で，Coulomb 型ポテンシャル

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{A}{r} \quad (1.5.65)$$

による束縛状態 ($E < 0$) を考える．

$$\frac{2mA}{\hbar^2} = \alpha, \quad -\frac{2mE}{\hbar^2} = \varepsilon \quad (1.5.66)$$

とおけば，Schrödinger 方程式は

$$\left(\nabla^2 + \frac{\alpha}{r} - \varepsilon \right) \psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.5.67)$$

3) Bessel 函数を見直すと，次数が自然数でない場合の定義ができないように思える．後に説明するが，(1.5.29) 式の分母の $(m+s)!$ をガンマ函数によって $\Gamma(m+s+1)$ とすればよい．

と変形できる．解を変数分離して，

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (1.5.68)$$

とする．整理すると，前節と同様に角度成分は球面調和函数になる．動径成分は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\alpha}{r} - \varepsilon \right] R(r) = 0 \quad (1.5.69)$$

を満たす．ここから変数変換すると，Laguerre の陪微分方程式が得られ，Laguerre 陪多項式が解になる．

§ 1.A Fourier 級数・Fourier 変換・デルタ函数

ある函数 f の満たす微分方程式を直接解くよりも，その Fourier 変換が満たす方程式を解くほうが楽なことが頻繁にある．

1.A.1 Fourier 級数

周期 2π の実函数 $f(x)$ に対して，

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.A.1)$$

とできる．ただし

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x) dx, & (1.A.2) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx f(x) dx. & (1.A.3) \end{cases}$$

あるいは，

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & (b_0 = 0) & (1.A.4) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_n^* & & (1.A.5) \end{cases}$$

ゆえに

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx \quad (1.A.6)$$

とおくと,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.A.7)$$

証明 (1.A.6) 式へ (1.A.7) 式を代入する:

$$\begin{aligned} (1.A.6) \text{ 式右辺} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \left(\sum_m c_m e^{imx} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)x} dx \\ &= c_n. \end{aligned} \quad (1.A.8)$$

今度は逆に, (1.A.7) 式へ (1.A.6) 式を代入する:

$$\begin{aligned} (1.A.7) \text{ 式右辺} &= \sum_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y) \right) e^{inx} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in(x-y)} \right)}_{(*)} f(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-y) f(y) dy \\ &= f(x). \end{aligned} \quad (1.A.9)$$

よって, 確かに正しく変換されていることが分かった.⁴⁾ ■

例 1 $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x < \pi$ を Fourier 変換する.

$$c_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 0 \\ 0 & n : \text{even} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & n : \text{odd} \end{cases} \quad (1.A.10)$$

$$(1.A.11)$$

$$(1.A.12)$$

が係数になる.

4) 実は (*) は, 周期 2π のデルタ函数である.

例 2 $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ を Fourier 変換する .

1.A.2 Fourier 変換

周期 2π から $-\infty < x < \infty$ へ拡張する . 総和から積分になる :

$$\begin{cases} \tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ipx} dx, & (1.A.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p)e^{ipx} dp. & (1.A.14) \end{cases}$$

証明 (1.A.13) 式を (1.A.14) 式へ代入する :

$$\begin{aligned} (1.A.14) \text{ 式右辺} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ipy} dy \right) e^{ipx} dp \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-y)} dp \right)}_{2\pi\delta(x-y)} dy \\ &= f(x). \end{aligned} \quad (1.A.15)$$

■

1.A.3 デルタ函数

定義 1.5 デルタ函数とは ,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}, \quad (1.A.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (1.A.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \quad (1.A.18)$$

を満たす超函数である .

性質

簡単な性質に、以下の二つがある：

$$\begin{cases} \delta(-x) = \delta(x), \\ \delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x) \quad (a > 0). \end{cases} \quad (1.A.19)$$

$$(1.A.20)$$

より一般的には、

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(a_i)|} \delta(x - a_i) \quad (a_i \text{ は } f(x) = 0 \text{ の解}) \quad (1.A.21)$$

が成立する。また、デルタ函数の微分は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0) \quad (1.A.22)$$

を満たす。

デルタ函数のいろいろな表現

$$\textcircled{1} \delta(x) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x - ia} \quad (1.A.23)$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{\pi x^2 + a^2} \quad (1.A.24)$$

$$\textcircled{2} \delta(x) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad (1.A.25)$$

$$\textcircled{3} \delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin \lambda x}{\pi x} \quad (1.A.26)$$

実はこれらは、 $x \neq 0$ で必ずしも $\delta(x) = 0$ とはなっていない（激しく振動する）。しかし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (1.A.27)$$

は満たしている（これがデルタ函数のより正しい定義である）。

Dirichlet の積分定理⁵⁾

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で、有限個の単調な区間に分けられるとする。このとき、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{\pi x} dx = \begin{cases} 0 & (a < b < 0) & (1.A.28) \\ \frac{f(-0)}{2} & (a < b = 0) & (1.A.29) \\ \frac{f(-0) + f(+0)}{2} & (a < 0 < b) & (1.A.30) \\ \frac{f(+0)}{2} & (a = 0 < b) & (1.A.31) \\ 0 & (0 < a < b) & (1.A.32) \end{cases}$$

とできる。特に、 $f(x)$ が $x = 0$ で連続のとき、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{\pi x} dx = f(0) \quad (a < 0 < b) \quad (1.A.33)$$

である。

実は Fourier 級数・変換に出てきたデルタ函数は同じように、「振動するが、(1.A.18) 式は満たしている形」になっている。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-y)} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-y)} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(x-y)} e^{ip(x-y)} \right]_{-\lambda}^{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin \lambda(x-y)}{\pi(x-y)} \\ &= \delta(x-y) \end{aligned} \quad (1.A.34)$$

Fourier 級数の方は、

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \right) \end{aligned} \quad (1.A.35)$$

5) cf. 寺沢寛一「自然科学者のための数学概論」

であり,

$$\begin{aligned}
 D(x) \sin x &= \frac{1}{2\pi} \left(\sin x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \sin x \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} [\sin(N-1)x + \sin Nx] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{x}{2} \sin \left(N - \frac{1}{2} \right) x \\
 &= x \cos \frac{x}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sin \left(N - \frac{1}{2} \right) x}{\pi x}}_{\delta(x)} \tag{1.A.36}
 \end{aligned}$$

と, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ によって

$$\begin{aligned}
 D(x) &= \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \delta(x) \\
 &= \delta(x) \quad (-\pi \leq x < \pi) \tag{1.A.37}
 \end{aligned}$$

第 2 章

特殊函数

§ 2.1 直交多項式としての特殊函数

1.5 節で見た Bessel 函数, Legendre 陪函数, Laguerre 陪函数, そして他にも Hermite 函数は直交函数系をなす. さらに Bessel 函数以外は, 直交多項式の形で頻繁に登場する. 例えば, Legendre 多項式 $P_l(x)$ は l 次の多項式で,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad \dots \quad (2.1.1)$$

また $\{P_0, P_1, \dots\}$ は, $[-1, 1]$ で定義された内積に対して直交系を成す:

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (2.1.2)$$

2.1.1 函数の内積

定義 2.1 $[a, b]$ で定義された $f(x), g(x)$ に対して, $w(x)$ を重みとする内積を

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx \quad (2.1.3)$$

と定義する. $w(x)$ は重み函数といい, $[a, b]$ において正の値をとる.

内積には以下の性質がある:

1. $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$
2. $\langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle, \quad \langle \lambda f, g \rangle = \lambda^* \langle f, g \rangle$
3. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$
4. $\langle f, f \rangle = \|f\|^2 \geq 0$: 函数のノルム
5. $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$: Cauchy-Schwarz の不等式
6. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$: 三角不等式

5,6 について証明する . まず 5 について :

証明 $\langle f, g \rangle = |\langle f, g \rangle| e^{i\alpha}$ に対して , $\lambda = x e^{i\alpha}$ とおき (x は実数) , $\|f - \lambda^* g\|^2$ を計算する :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \|f - \lambda^* g\|^2 \\
 &= \int_a^b w(x) (f^* - \lambda g^*) (f - \lambda^* g) dx \\
 &= \int_a^b w(x) \left[|f|^2 - (\lambda^* f^* g + \lambda f g^*) + |\lambda|^2 |g|^2 \right] dx \\
 &= \|f\|^2 - (\lambda^* \langle f, g \rangle + \lambda \langle f, g \rangle^*) + |\lambda|^2 \|g\|^2 \\
 &= \|f\|^2 - 2x |\langle f, g \rangle| + x^2 \|g\|^2 \tag{2.1.4}
 \end{aligned}$$

これが任意の x において成立するはず (ノルムは非負) なので , 判別式の条件より

$$|\langle f, g \rangle|^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0 \tag{2.1.5}$$

$$\therefore |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \tag{2.1.6}$$

と , 示された . ■

続いて 6 について :

証明 $f + g =: h$ とおく . さらに

$$f = \frac{\langle h, f \rangle}{\|h\|^2} h + \tilde{f}, \quad g = \frac{\langle h, g \rangle}{\|h\|^2} h + \tilde{g} \tag{2.1.7}$$

とおくと , それぞれと h との内積をとれば分かるように

$$\langle h, \tilde{f} \rangle = 0, \quad \langle h, \tilde{g} \rangle = 0 \tag{2.1.8}$$

である . よって

$$\|f\|^2 = \left| \frac{\langle h, f \rangle}{\|h\|^2} \right|^2 + \|\tilde{f}\|^2 \geq \frac{\langle h, f \rangle^2}{\|h\|^2}, \tag{2.1.9}$$

$$\|g\|^2 = \left| \frac{\langle h, g \rangle}{\|h\|^2} \right|^2 + \|\tilde{g}\|^2 \geq \frac{\langle h, g \rangle^2}{\|h\|^2} \tag{2.1.10}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \|f\| + \|g\| &\geq \frac{|\langle h, f \rangle|}{\|h\|} + \frac{|\langle h, g \rangle|}{\|h\|} \geq \frac{\overbrace{|\langle h, f \rangle + \langle h, g \rangle|}^{|\langle h, h \rangle| = \|h\|^2}}{\|h\|} = \|h\| \\ &= \|f + g\| \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

と, 示された. ■

2.1.2 直交函数系

定義 2.2

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx = 0 \quad (2.1.12)$$

のとき, $f(x), g(x)$ は直交するという.

定義 2.3 函数の集合 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ が*

$$\langle f_i, f_j \rangle = N_i \delta_{ij} \quad (N_i > 0) \quad (2.1.13)$$

を満たすとき, これを直交函数系という. さらに,

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} f_i \quad (2.1.14)$$

$$\Rightarrow \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.1.15)$$

というときは, 正規直交函数系 (正規直交系) という.

例

$$g_m(x) = e^{imx} \quad (2.1.16)$$

は, 区間 $[-\pi, \pi]$, 重み $w = 1$ に対して直交函数系になっている:

$$\langle g_m, g_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx} dx = 2\pi \delta_{mn}. \quad (2.1.17)$$

2.1.3 完全性について

定義 2.4 区間 $[a, b]$ で任意の函数 $f(x)$ が $\{f_1, f_2, \dots, f_n(x), \dots\}$ の線型結合で表すことができるとき, $\{f_1, \dots\}$ は完全系を成すという. このとき,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (2.1.18)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n f_n(x) \right\|^2 = 0 \quad (2.1.19)$$

という関係式が成り立つ.

Bessel の不等式

正規直交系 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ に対して,

$$d_N^2 = \left\| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(x) \right\|^2 \quad (2.1.20)$$

が最小値をとるような $\{c_n\}$ を求めてみよう. 実際に計算して,

$$\begin{aligned} d_N^2 &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N c_n \langle f, \varphi_n \rangle - \sum_{n=1}^N c_n^* \langle f, \varphi_n \rangle^* + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n^* c_m \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle}_{\delta_{nm}} \\ &= \sum_{n=1}^N |c_n - \langle f, \varphi_n \rangle^*|^2 + \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n \rangle^2 \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

となる. これを最小にするには,

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle^* = \langle \varphi_n, f \rangle \quad (2.1.22)$$

とすればよい. このとき,

$$d_N^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n \rangle^2 \geq 0 \quad (2.1.23)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^N |c_n|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad (2.1.24)$$

なる不等式が成立する. これは Bessel の不等式と呼ばれる.

Parseval の等式

また $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ が完全系であれば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad (2.1.25)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, f \rangle \varphi_n(x) \quad (2.1.26)$$

という式が成立する．第 1 式は Parseval の等式と呼ばれる．

完全系の条件

正規直交系 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ が完全系であるための条件を考える．デルタ函数が展開できる，つまり

$$\delta(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(y) \varphi_n(x) \quad (2.1.27)$$

をみたく $d_n(y)$ が存在すれば，任意の函数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\int dy d_n(y) f(y) \right]}_{c_n} \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

と展開できるので，完全系であるといえる．

(2.1.27) 式が成立する条件を求める．両辺に $w(x) \varphi_m^*(x)$ をかけて x で積分すると，

$$(\text{左辺}) = w(y) \varphi_m^*(y) \quad (2.1.29)$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n(y) \underbrace{\int w(y) \varphi_m^*(y) \varphi_n(x) dx}_{\delta_{mn}} \\ &= d_m(y) \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

となる．ゆえに (2.1.27) 式へ代入すると，

$$w(y) \sum_n \varphi_n^*(x) \varphi_n(y) = \delta(x - y) \quad (2.1.31)$$

となる．この式が成立すれば， $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ は完全系であるといえる．

例 正規直交系

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad (2.1.32)$$

は，

$$\sum_n \varphi_n^*(x) \varphi_n(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in(x-y)} = \delta(x - y) \quad (2.1.33)$$

なので，完全系である．

2.1.4 直交多項式

直交函数系を成す函数で，かつ実の多項式であるものを直交多項式という．表に簡単にまとめる

積分区間 I	名前	記号	重み函数 $w(x)$
Ⓐ $[-1, 1]$	Jacobi	$P_n^{(\alpha, \beta)}$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (\alpha, \beta > -1)$
	Gegenbauer	$C_n^{(\alpha)}$	$(1-x^2)^\alpha \quad (\alpha > -1)$
	Chebyshev	T_n	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
	Legendre	P_n	1
Ⓑ $[0, \infty)$	Sonin	$S_n^{(\alpha)}$	$e^{-x} x^\alpha \quad (\alpha > -1)$
	Laguerre	L_n	e^{-x}
Ⓒ $(-\infty, \infty)$	Hermite	H_n	e^{-x^2}

具体的には，

Ⓐ Legendre 多項式

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (2.1.34)$$

Chebyshev 多項式

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = 2x^2 - 1 \quad (2.1.35)$$

⑧ Laguerre 多項式

$$L_0 = 1, \quad L_1 = -x + 1, \quad L_2 = x^2 - 4x + 2 \quad (2.1.36)$$

⑨ Hermite 多項式

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2 \quad (2.1.37)$$

などである。

2.1.5 直交多項式の一意性

直交多項式は，区間 I と重み函数 $w(x)$ を与えると，規格化を除いて一意に定まる。

Gram-Schmidt の方法

まず $P_0(x) = 1$ とする． $P_1(x) = x + \alpha$ とおき， $\langle P_0, P_1 \rangle = 0$ と要請すれば，

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \langle P_0, x \rangle + \alpha \langle P_0, 1 \rangle = 0 \quad (2.1.38)$$

$$\therefore \alpha = -\frac{\langle P_0, x \rangle}{\langle P_0, 1 \rangle} \quad (2.1.39)$$

である．次に $P_2(x) = x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ とおく． $\langle P_0, P_2 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle = 0$ と要請すれば，

$$\langle P_0, P_2 \rangle = \langle P_0, x^2 \rangle + \beta_1 \langle P_0, x \rangle + \beta_0 \langle P_0, 1 \rangle = 0 \quad (2.1.40)$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \langle P_1, x^2 \rangle + \beta_1 \langle P_1, x \rangle + \beta_0 \langle P_1, 1 \rangle = 0 \quad (2.1.41)$$

となるので，これらから β_1, β_0 を求めればよい．以下同様にして， $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k x^k$ の γ_k を求める．

別の方法

P_1, \dots, P_{n-1} が分かっているときに，

$$P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \quad (2.1.42)$$

とすると, $\langle P_l, P_n \rangle = 0$ ($l = 0, \dots, n-1$) より

$$\langle P_l, P_n \rangle = \langle P_l, x^n \rangle + C_l \langle P_l, P_l \rangle \quad (2.1.43)$$

$$\therefore C_l = -\frac{\langle P_l, x^n \rangle}{\langle P_l, P_l \rangle} \quad (2.1.44)$$

$$\therefore P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{\langle P_k, x^n \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \right) P_k(x) \quad (2.1.45)$$

となる.

2.1.6 直交多項式の完全性

任意の n 次多項式は, 直交多項式 $p_0(x), p_1(x), \dots$ で表すことができる:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \Rightarrow f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x) \quad (2.1.46)$$

一方, $f(x)$ を $[a, b]$ で連続な任意の函数とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a \leq x \leq b$ で常に

$$|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon \quad (2.1.47)$$

となる多項式 $f_N(x)$ が存在することが分かっている (Weierstrass の定理).

以上より, 任意の連続な函数 $f(x)$ は, 直交多項式 $p_n(x)$ で展開できる:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x). \quad (2.1.48)$$

2.1.7 直交多項式の Rodrigues の公式による表現

直交多項式について, Rodrigues の公式:

$$p_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[w(x) (Q(x))^n \right] \quad (2.1.49)$$

が成立する. ただし c_n は規格化定数で, $Q(x)$ は多項式である.

いくつかの直交多項式についてまとめる:

積分区間 I	名前	記号	重み函数 $w(x)$	$Q(x)$
Ⓐ $[-1, 1]$	Jacobi	$P_n^{(\alpha, \beta)}$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$	$1-x^2$
	Gegenbauer	$C_n^{(\alpha)}$	$(1-x^2)^\alpha$ $(\alpha > -1)$	
	Chebyshev	T_n	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	
	Legendre	P_n	1	
Ⓑ $[0, \infty)$	Sonin	$S_n^{(\alpha)}$	$e^{-x}x^\alpha$ $(\alpha > -1)$	x
	Laguerre	L_n	e^{-x}	
Ⓒ $(-\infty, \infty)$	Hermite	H_n	e^{-x^2}	1

多項式・次数の CHECK $p_n(x)$ が x の多項式であるか確認する .

Ⓐ Legendre 多項式

$$\frac{P_n(x)}{c_n} = \frac{d^n}{dx^n} \underbrace{\left[(1-x^2)^n \right]}_{2n \text{ 次多項式}} = n \text{ 次多項式} \quad (2.1.50)$$

Ⓑ Laguerre 多項式

$$\begin{aligned} \frac{L_n(x)}{c_n} &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \\ &= e^x \sum_{k=0}^n {}_n C_k (D^{n-k} e^{-x}) (D^k x^n) \quad \left(D = \frac{d}{dx} \right) \\ &= e^x \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^{n-k} e^{-x} (\bullet \times x^{n-k}) = n \text{ 次多項式} \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

Ⓒ Hermite 多項式

$$\frac{H_n(x)}{c_n} = e^{x^2} \underbrace{\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}}_{e^{-x^2} \times n \text{ 次多項式}} = n \text{ 次多項式} \quad (2.1.52)$$

直交性の CHECK $p_n(x)$ が直交しているか確認する .

$$p_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} D^n G_n(x) \quad (2.1.53)$$

とおく. ただし

$$\begin{cases} D^n = \frac{d^n}{dx^n} & (2.1.54) \\ G_n(x) = w(x)Q(x)^n & (2.1.55) \end{cases}$$

である. 次の (i), (ii) のステップで示す.

ステップ (i) $G_n(x) = w(x)Q(x)^n$ は,

$$D^k G_n(a) = D^k G_n(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.1.56)$$

を満たす.

例えば Jacobi では,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \\ &= (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}. \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

$k \leq n-1$ のとき,

$$\begin{aligned} D^k G_n(x) &= D^k [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] \\ &= \sum_{j=0}^k \bullet \times (1-x)^{\alpha+n-j} (1+x)^{\beta+n-(k-j)}. \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

であり,

$$\begin{cases} \alpha + n - j \geq \alpha + n - k \geq \alpha + 1 > 0, & (2.1.59) \\ \beta + n - (n - j) \geq \beta + n - k \geq \beta + 1 > 0. & (2.1.60) \end{cases}$$

よって

$$D^k G_n(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.1.61)$$

である. 他も同様に示すことができる.

ステップ (ii) $f(x)$ を $(n-1)$ 次以下の多項式として,

$$\begin{aligned} \langle f, p_n \rangle &= \int_a^b w(x) f(x) \left[c_n \frac{1}{w(x)} D^n G_n(x) \right] dx \\ &= c_n \int_a^b f(x) D^n G_n(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_n \underbrace{\left[f(x) D^n G_n(x) \right]_a^b}_0 - c_n \int_a^b [Df(x)] [D^{n-1} G_n(x)] dx \\
&= \dots \quad (\text{部分積分を次々用いる}) \\
&= (-1)^n c_n \int_a^b \underbrace{[D^n f(x)]}_0 G_n(x) dx \\
&\quad \quad \quad (f(x) \text{ は } (n-1) \text{ 次以下}) \\
&= 0 \tag{2.1.62}
\end{aligned}$$

よって特に,

$$\langle p_0, p_n \rangle = \langle p_1, p_n \rangle = \dots = \langle p_{n-1}, p_n \rangle = 0. \tag{2.1.63}$$

よって Rodrigues の公式は直交多項式となっている.

2.1.8 直交多項式の満たす微分方程式

Rodrigues の公式によって

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[w(x) (Q(x))^n \right]. \tag{2.1.64}$$

$$\left(\langle P_n, P_m \rangle = N_n \delta_{nm} \right) \tag{2.1.65}$$

と書けた直交多項式は, 微分方程式

$$\left[Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{P_1}{c_1} \frac{d}{dx} + \lambda_n \right] u(x) = 0 \tag{2.1.66}$$

$$\lambda_n = -n \left(\frac{P_1'}{c_1} + \frac{n-1}{2} Q'' \right) \tag{2.1.67}$$

の解になっている. これを証明する.

証明 ステップ (i) ~ (v) で示す.

ステップ (i)

$$\hat{H} = \frac{1}{w} \frac{d}{dx} \left(w Q \frac{d}{dx} \right) \tag{2.1.68}$$

とおくと, (2.1.66) 式は

$$\hat{H}u = -\lambda_n u \quad (2.1.69)$$

と書ける.

ステップ (ii) \hat{H} は n 次多項式を n 次 (以下) の多項式に写像する:

$$\hat{H}u = \underbrace{Q}_{2 \text{ 次以下}} u'' + \underbrace{\frac{P_1}{c_1}}_{1 \text{ 次}} u' \quad (2.1.70)$$

ステップ (iii) \hat{H} は内積に対して

$$\langle f, \hat{H}g \rangle = \langle \hat{H}f, g \rangle \quad (2.1.71)$$

を満たす (Hermite 性):

$$\begin{aligned} \therefore \langle f, \hat{H}g \rangle &= \int_a^b w f \hat{H}g dx = \int_a^b f \frac{d}{dx} \left(w Q \frac{dg}{dx} \right) dx \\ &= \underbrace{\left[f w Q \frac{dg}{dx} \right]_a^b}_0 - \int_a^b \frac{df}{dx} w Q \frac{dg}{dx} dx \\ &= - \left[\frac{df}{dx} w Q g \right]_a^b + \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} w Q \right) \right] g dx \\ &= \langle \hat{H}f, g \rangle \end{aligned} \quad (2.1.72)$$

ステップ (iv) $P_n(x)$ は \hat{H} の固有函数;

$$\hat{H}P_n(x) = k_n P_n(x). \quad (2.1.73)$$

\therefore ステップ (ii) より

$$\hat{H}P_n(x) = \sum_{l=0}^n c_l^{(n)} P_l(x) \quad (2.1.74)$$

と書ける. $m < n$ のとき,

$$\langle P_m, \hat{H}P_n \rangle = \sum_{l=0}^n c_l^{(n)} \langle P_m, P_l \rangle = c_m^{(n)} N_m. \quad (2.1.75)$$

一方, ステップ (iii) より,

$$\langle P_m, \hat{H}P_n \rangle = \langle \hat{H}P_m, P_n \rangle = \sum_{l=0}^m c_l^{(m)} \langle P_l, P_n \rangle = 0 \quad (2.1.76)$$

(2.1.75), (2.1.76) 式より,

$$c_m^{(l)} = 0 \quad (m < n). \quad (2.1.77)$$

(2.1.74) 式より,

$$\hat{H}P_n = c_n^{(n)} P_n. \quad (2.1.78)$$

ステップ (v) 固有値を求める.

$$\begin{cases} P_n = px^n + \dots & (2.1.79) \\ Q_n = ax^2 + \dots & (2.1.80) \\ \frac{P_1}{c_1} = bx + \dots & (2.1.81) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n = px^n + \dots & (2.1.79) \\ Q_n = ax^2 + \dots & (2.1.80) \\ \frac{P_1}{c_1} = bx + \dots & (2.1.81) \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \hat{H}P_n &= QP_n'' + \frac{P_1}{c_1} P_n' \\ &= (ax^2 + \dots)(pn(n-1)x^{n-2} + \dots) + (bx + \dots)(pnx^{n-1} + \dots) \\ &= n[a(n-1) + b] \underbrace{(px^n + \dots)}_{P_n(x)} = n \underbrace{\left[\frac{Q''}{2}(n-1) + \frac{P_1'}{c_1} \right]}_{-\lambda_n} P_n \\ &= -\lambda_n P_n(x) \end{aligned} \quad (2.1.82)$$

■

微分方程式の具体形

一般形は

$$\left(Q \frac{d^2}{dx^2} + \frac{P_1}{c_1} \frac{d}{dx} + \lambda_n \right) u(x) = 0 \quad (2.1.83)$$

$$\begin{cases} \lambda_n = -n \left(\frac{P_1'}{c_1} + \frac{n-1}{2} Q'' \right) \\ \frac{P_1}{c_1} = \frac{1}{w} (wQ)^2 \end{cases} \quad (2.1.84)$$

である .

Jacobi · Legendre の微分方程式

$$\begin{cases} w = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \end{cases} \quad (2.1.85)$$

$$\begin{cases} Q = 1 - x^2 \end{cases} \quad (2.1.86)$$

なので ,

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{c_1} &= \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d}{dx} [(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1}] \\ &= -(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.1.87)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1'}{c_1} = -(\alpha + \beta + 2) \quad (2.1.88)$$

$$\lambda = n(\alpha + \beta + n + 1) \quad (2.1.89)$$

よって

$$\boxed{\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + [-(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - \alpha)] \frac{d}{dx} + n(\alpha + \beta + n + 1) \right] u = 0} \quad (2.1.90)$$

Jacobi の微分方程式

$\alpha = \beta$ で Gegenbauer , $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ で Chebyshev , $\alpha = \beta = 0$ で

$$\boxed{\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + n(n+1) \right] u(x) = 0} \quad (2.1.91)$$

Legendre の微分方程式 解 : Legendre 多項式

Sonin · Laguerre の微分方程式

$$\begin{cases} w = e^{-x} x^\alpha \end{cases} \quad (2.1.92)$$

$$\begin{cases} Q = x \end{cases} \quad (2.1.93)$$

なので,

$$\frac{P_1}{c_1} = e^x x^\alpha (e^{-x} x^{\alpha+1})' = -x + (\alpha + 1) \quad (2.1.94)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1'}{c_1} = -1 \quad (2.1.95)$$

$$\lambda = -n(-1 + 0) = n \quad (2.1.96)$$

よって

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + [-x + (\alpha + 1)] \frac{d}{dx} + n \right] u(x) = 0 \quad (2.1.97)$$

Sonin の微分方程式 解: Sonin の多項式

$\alpha = 0$ で

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (-x + 1) \frac{d}{dx} + n \right] u(x) = 0 \quad (2.1.98)$$

Laguerre の微分方程式

Hermite の微分方程式

$$\begin{cases} w = e^{-x^2} & (2.1.99) \\ Q = 1 & (2.1.100) \end{cases}$$

なので,

$$\frac{P_1}{c_1} = e^{x^2} (e^{-x^2})' = -2x \quad (2.1.101)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1'}{c_1} = -2 \quad (2.1.102)$$

$$\lambda = -n(-2 + 0) = 2n \quad (2.1.103)$$

よって

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right) u(x) = 0 \quad (2.1.104)$$

Hermite の微分方程式 解: Hermite 多項式

物理の応用

Legendre 多項式 Legendre 陪函数 Legendre 多項式から導かれる

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (2.1.105)$$

を Legendre 陪函数という． P_n^m は多項式ではない．詳細は 2.2 節で述べる．

Laguerre 多項式 Laguerre 陪多項式 Laguerre 多項式から導かれる，

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \quad (2.1.106)$$

を Laguerre 陪多項式という．これは $(n-m)$ 次の多項式である．Laguerre の微分方程式を m 回微分すると，

$$\left[x \frac{d}{dx^2} + [-x + (m+1)] \frac{d}{dx} + (n-m) \right] u^{(m)} = 0 \quad (2.1.107)$$

となる．これを Laguerre の陪微分方程式という．この方程式は，量子力学において水素原子の波動函数（を式変形したもの）が満たす．

Sonin の微分方程式と Lagerre の陪微分方程式 (2.1.107) 式と Sonin の微分方程式 (2.1.97) を見比べると，Sonin の微分方程式で $n \rightarrow n-m, \alpha \rightarrow n$ としたものになっていることが分かる．よって，Sonin 多項式 $S_n^{(\alpha)}(x)$ によって

$$L_n^m \propto S_{n-m}^{(m)}(x) \quad (2.1.108)$$

と書ける．また，Sonin 多項式の Rodrigues 表示

$$S_n^{(\alpha)} \propto e^x x^{-\alpha} D^n [e^{-x} x^{\alpha+n}] \quad (2.1.109)$$

によって，

$$L_n^m(x) \propto e^x x^{-m} D^{n-m} [e^{-x} x^n] \quad (2.1.110)$$

Sonin 多項式の直交性

$$\int_0^\infty e^{-x} S_k^{(\alpha)}(x) S_l^{(\alpha)}(x) dx \propto \delta_{kl} \quad (2.1.111)$$

より,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m L_k^m(x) L_l^m(x) dx \propto \delta_{kl} \quad (2.1.112)$$

Hermite 多項式 量子力学的な調和振動子を考える. 定常状態の Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - E \right) \varphi(x) = 0 \quad (2.1.113)$$

であるから, 変数を無次元化するために

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} y, \\ E = \hbar\omega \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \quad (2.1.114)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \hbar\omega \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \quad (2.1.115)$$

とおく. すると (2.1.113) 式は

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - y^2 + (2\nu + 1) \right] \varphi = 0 \quad (2.1.116)$$

であり, $\varphi = e^{-\frac{y^2}{2}}$ とおくことで

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - 2y^2 + 2\nu \right) u(y) = 0 \quad (2.1.117)$$

と, Hermite の微分方程式が得られる.

$\nu = 0, 1, \dots$ でないときは, 解は $y \rightarrow \pm\infty (x \rightarrow \pm\infty)$ で収束しない. ゆえに, 物理的な状態を考えると $\nu = 0, 1, \dots =: n$ のときだけである. エネルギーはこれによって

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.118)$$

と, とびとびの値をとる (量子化).

(2.1.117) 式の解は Hermite 多項式によって

$$u(y) = H_n(y) \quad (2.1.119)$$

と求められるので、波動函数は

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \quad (2.1.120)$$

となる。

補足

これまでに出てきた微分方程式は 2 階の (同次線型) 微分方程式であるから、2 つの独立な解が存在するはずである。ここまでは、

$$Qu'' + \frac{P_1}{c_1}u' + \lambda_n u = 0 \quad (2.1.121)$$

の解として

$$P_n = c_n \frac{1}{w} D^n (wQ^n) \quad (2.1.122)$$

が分かっていた。ではもう一つの解はどのようになるのだろうか。

Legendre の微分方程式

$$(1-x^2)u' - 2xu' + n(n+1)u = 0 \quad (2.1.123)$$

について、これまでに分かっている解は Legendre 多項式

$$u = P_n(x) \quad (2.1.124)$$

である。もう一つの解として、第 2 種 Legendre 函数

$$u = Q_n(x) \quad (2.1.125)$$

が得られる。 $n = 1$ ではこれは

$$Q_1 = -1 + \frac{1}{2}x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (2.1.126)$$

となる。これは多項式でなく、また $x = \pm 1$ で発散するため、例えば球面調和函数 ($x = \cos \theta$) としては使うことができない。

このように、物理的状況 (境界条件) に応じて解を選択する必要がある。

2.1.9 直交多項式の規格化

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (wQ(x)^n) \quad (2.1.127)$$

の規格化定数を定める． $\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{nm}$ となるように規格化すれば良さそうなのだが，それぞれ慣習で決まっている．

$$\langle P_n, P_m \rangle = N_n \delta_{nm} \quad (2.1.128)$$

とすれば， N_n は

$$\begin{aligned} N_n &= \int_a^b w P_n P_n dx \\ &= \dots \\ &= c_n (-1)^n \int_a^b \underbrace{(D^n P_n)}_{\text{定数}} w Q^n dx \\ &= c_n (-1)^n (D^n P_n) \int_a^b w Q^n dx \end{aligned} \quad (2.1.129)$$

である．

Legendre 多項式

$w = 1, Q = 1 - x^2$ より，

$$\begin{aligned} N_n &= c_n (-1)^n \underbrace{(D^n P_n)}_{c_n (-1)^n (2n)!} \underbrace{\int_a^b w Q^n dx}_{\text{部分積分: } \frac{(-n!)^2}{(2n+1)!} 2^{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+1} (c_n 2^n n!)^2. \end{aligned} \quad (2.1.130)$$

$c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ とおき，

$$\boxed{\begin{aligned} P_n &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \\ \langle P_n, P_m \rangle &= \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \end{aligned}} \quad (2.1.131)$$

Chebyshev 多項式

結果だけ示す：

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \quad (2.1.132)$$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] \\ \langle T_n, T_m \rangle &= \delta_{nm} \times \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (n \neq 0) \\ \pi & (n = 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.133)$$

実は, $T_n(x)$ は $\cos n\theta$ の $\cos \theta$ 展開になっている：

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \quad (2.1.134)$$

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi d\theta \cos n\theta \cos m\theta = \delta_{nm} \times \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (n \neq 0) \\ \pi & (n = 0) \end{cases}. \quad (2.1.135)$$

Laguerre 多項式

 $w = e^{-x}$, $Q = x$ より,

$$N_n = c_n^2 (n!)^2. \quad (2.1.136)$$

 $c_n = 1$ とおいて,

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \\ \langle L_n, L_m \rangle &= (n!)^2 \delta_{nm} \end{aligned} \quad (2.1.137)$$

(注: $c_n = 1/n!$ とする定義もある.)

Laguerre 陪多項式

$$\begin{aligned} L_n^m(x) &= (-1)^n e^x D^{n-m} (e^{-x} x^m) \\ \langle L_n^m, L_l^m \rangle &= \int_0^\infty e^{-x} x^m L_n^m L_l^m dx = \frac{(n!)^2}{(n-m)!} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (2.1.138)$$

Hermite 多項式

$$N_n = c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (2.1.139)$$

であり, $c_n = (-1)^n$ として

$$\boxed{\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\ \langle H_n, H_m \rangle &= 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \end{aligned}} \quad (2.1.140)$$

2.1.10 直交多項式の母函数

母函数

$$\left\{ \begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{y^n}{n!}, & (2.1.141) \\ g(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n. & (2.1.142) \end{aligned} \right.$$

これらの函数形が分かれば, その y によるべき展開で $P_n(x)$ が得られる:

$$P_n(x) = \left. \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right|_{y=0} \quad (2.1.143)$$

$$= \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n g}{\partial y^n} \right|_{y=0}. \quad (2.1.144)$$

これが直交多項式の母函数による定義である.

Rodrigues の公式から母函数を求める

Rodrigues の公式

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (wQ^n) \quad (2.1.145)$$

で, x を複素数へ拡張した

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} \quad (2.1.146)$$

を用いて,

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C dz \frac{w(z)Q(z)^n}{(z-x)^{n+1}} \quad (2.1.147)$$

とできる. これを (2.1.143), (2.1.144) 式へ代入して母函数を求める.

Legendre 多項式 $c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $w = 1$, $Q = 1 - x^2$ より,

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^n} \oint_C dz \frac{(z^2 - 1)^n}{(z-x)^{n+1}}. \quad (2.1.148)$$

よって,

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_C dz \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^n (z^2 - 1)^n}{(z-x)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - x - \frac{y}{2}(z^2 - 1)} \\ &\quad \left(\because \frac{1}{X-Y} = \sum \frac{Y^n}{X^{n+1}} \text{ を用いた.} \right. \\ &\quad \left. \text{収束するには } |Y| < |X|, \text{ 今の場合では} \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{y}{2}(z^2 - 1) \right| < |z - x| \text{ となる経路が必要.} \right) \\ &= -\frac{2}{y} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z - z_+)(z - z_-)} \quad (2.1.149) \\ &\quad \left(\because \text{分母を因数分解した.} \right. \\ &\quad \left. z_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2xy + y^2}}{y} \text{ である.} \right) \end{aligned}$$

y が十分に小さいときは

$$z_+ \rightarrow \frac{2}{y} \rightarrow \infty \quad (2.1.150)$$

$$z_- \rightarrow \frac{1 - (1 - xy)}{y} \sim x \quad (2.1.151)$$

であるから,

$$g(x, y) = -\frac{2}{y} \frac{z - z_+}{z - z_-}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}. \quad (2.1.152)$$

よって,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}} \quad (2.1.153)$$

Legendre 多項式の母函数表示

Laguerre 多項式 $c_n = 1, w = e^{-z}, Q = z$ より,

$$L_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} e^x \oint_C \frac{e^{-z} z^n}{(z-x)^{n+1}} dz. \quad (2.1.154)$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{y^n}{n!} &= \frac{1}{2\pi i} e^x \oint_C dz e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zy)^n}{(z-x)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} e^x \oint_C dz e^{-z} \frac{1}{z-x-zy} \\ &= \frac{1}{2\pi i} e^x \oint_C dz e^{-z} \frac{1}{1-y} \frac{1}{z - \frac{x}{1-y}} \\ &= e^x e^{-\frac{x}{1-y}} \frac{1}{1-y} \\ &= \frac{1}{1-y} e^{-\frac{xy}{1-y}}. \end{aligned} \quad (2.1.155)$$

よって,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{1-y} \exp\left(-\frac{xy}{1-y}\right)} \quad (2.1.156)$$

Laguerre 多項式の母函数表示

Laguerre 陪多項式 (2.1.156) 式に $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ を作用する:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^m(x) \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{1-y} \left(\frac{-y}{1-y}\right)^m \exp\left(-\frac{xy}{1-y}\right) \quad (2.1.157)$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} L_n^m(x) \frac{y^{n-m}}{n!} = \frac{(-1)^m}{(1-y)^{m+1}} \exp\left(-\frac{xy}{1-y}\right) \quad (2.1.158)$$

Hermite 多項式 $c_n =, w =, Q =$ より ,

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} (-1)^n e^{x^2} \oint_C dz e^{-z^2} \frac{1}{(z-x)^{n+1}}. \quad (2.1.159)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!} &= \frac{1}{2\pi i} e^{x^2} \oint_C dz e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{(z-x)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} e^{x^2} \oint_C dz e^{-z^2} \frac{1}{z-x+y} \\ &= e^{x^2} e^{-(x-y)^2} \\ &= e^{2xy-y^2}. \end{aligned} \quad (2.1.160)$$

よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!} = e^{2xy-y^2} \quad (2.1.161)$$

Hermite 多項式の母函数

2.1.11 直交多項式の漸化式

Hermite 多項式

Hermite 多項式の漸化式は ,

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) & (2.1.162) \\ H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) & (2.1.163) \end{cases}$$

である .

証明 母函数

$$f(x, y) = e^{2xy-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!} \quad (2.1.164)$$

の微分を考える：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2yf, \quad (2.1.165)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2x - 2y)f. \quad (2.1.166)$$

(2.1.165) 式へ (2.1.164) 式を代入し, y の係数を比較すれば (2.1.162) 式が, (2.1.166) 式へ (2.1.164) 式を代入し, y の係数を比較すれば (2.1.163) 式が得られる. ■

Laguerre 陪多項式

Laguerre 陪多項式の漸化式は

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) L_{n+1}^m(x) \\ \quad + (x - m - 2n - 1)L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^m(x) = 0 \end{cases} \quad (2.1.167)$$

$$\begin{cases} \left(x \frac{d}{dx} - n + m\right) L_n^m(x) = -n^2 L_{n-1}^m(x) \end{cases} \quad (2.1.168)$$

である. $m = 0$ とすれば, Laguerre 多項式の漸化式

$$\begin{cases} L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \end{cases} \quad (2.1.169)$$

$$\begin{cases} \left(x \frac{d}{dx} - n\right) L_n(x) = -n^2 L_{n-1}(x) \end{cases} \quad (2.1.170)$$

となる.

証明 今回も母函数を用いる.

$$f(x, y) = \frac{(-1)^m}{(1-y)^{m+1}} \exp\left(-\frac{xy}{1-y}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^m(x) \frac{y^{n-m}}{n!}, \quad (2.1.171)$$

$$\log f = \log(-1)^m - (m+1) \log(1-y) - \frac{xy}{1-y} \quad (2.1.172)$$

なので, x, y で微分して

$$\begin{cases} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{1-y}, \end{cases} \quad (2.1.173)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{m+1}{1-y} - \frac{x}{(1-y)^2}. \end{cases} \quad (2.1.174)$$

(2.1.174) 式 $\times(1-y^2)f$ の y^{n-m} の項の比較から (2.1.167) 式が得られる。また, (2.1.173), (2.1.174) 式から

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = -y^2 \frac{\partial f}{\partial y} - (m+1)yf \quad (2.1.175)$$

が示されるので, y^{n-m} の項を比較して (2.1.168) 式が得られる。 ■

Legendre 多項式 やはり母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n \quad (2.1.176)$$

を x, y で微分すると, 以下の漸化式が導出できる:

$$\begin{cases} (2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), & (2.1.177) \\ \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} - (n+1)x \right] P_n(x) = -(n+1)P_{n+1}(x), & (2.1.178) \\ \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} + nx \right] P_n(x) = nP_{n-1}(x). & (2.1.179) \end{cases}$$

第2・3式の [] 部分は P_n の次数を1つ上げ下げする昇降演算子である。

(以降で直交多項式以外の特殊函数を扱う)

§ 2.2 Legendre 陪函数

2.2.1 定義

定義 2.5

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (-n \leq m \leq n) \quad (2.2.1)$$

という函数を Legendre 陪函数という。

2.2.2 性質

Legendre 陪函数には，以下の性質がある：

$$\bullet P_n^0(x) = P_n(x), \quad (2.2.2)$$

$$\bullet P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x), \quad (2.2.3)$$

$$\bullet m \geq 0, P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (2.2.4)$$

ただし， $P_n(x)$ は Legendre 多項式である．

例 いくつか実際に計算すると

$$n=0 \quad P_0^0(x) = 1 \quad (2.2.5)$$

$$n=1 \quad P_1^0(x) = x \quad P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (2.2.6)$$

$$n=2 \quad P_2^0(x) = \frac{3x^2-1}{2} \quad P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2} \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2) \quad (2.2.7)$$

である． $m < 0$ については

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (2.2.8)$$

となる．

証明

$$D^k(x+1)^n(x-1)^n = \sum_{l=0}^k {}_k C_l D^l(x+1)^n D^{k-l}(x-1)^n \quad (2.2.9)$$

を用いて (2.2.8) 式の両辺を展開する．(略) ■

2.2.3 漸化式

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} + mx \right] P_l^m(x) = \sqrt{1-x^2} P_l^{m+1}(x), \quad (2.2.10) \\ \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} - mx \right] P_l^m(x) \\ \qquad \qquad \qquad = -(l+m)(l-m+1) \sqrt{1-x^2} P_l^{m-1}(x). \quad (2.2.11) \end{array} \right.$$

証明 (2.2.10) 式は (2.2.1) 式からすぐに示すことができる. (2.2.11) 式は (2.2.10) 式の両辺で $m \rightarrow -m$ として, (2.2.8) 式を用いる. ■

2.2.4 微分方程式

Legendre 陪函数は, 次の微分方程式の解である:

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0 \quad (2.2.12)$$

Legendre 陪微分方程式

証明 2通りの証明がある.

方法 1 Legendre の微分方程式から示す.

方法 2 漸化式の, (2.2.10) 式の両辺に $\frac{d}{dx} - \frac{mx}{1-x^2}$ を作用させて (2.2.11) 式を用いる. ($P_l^m \rightarrow P_l^{m+1} \rightarrow P_l^m$) ■

コメント

1. $l \neq$ 整数 のとき, (2.2.12) 式の解は $x = -1$ で発散するので, 使用できない.
2. もう一つの解 $Q_l^m(x)$ (第二種 Legendre 陪函数) は, $x = \pm 1$ で発散するので, 使用できない.

直交性

Legendre 陪函数には、次のような直交性がある：

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{kl} \quad (2.2.13)$$

証明

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &\stackrel{\text{(2.2.8) 式}}{=} (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^1 P_l^{-m}(x) P_l^m(x) dx \\ &\stackrel{\text{(2.2.1) 式}}{=} (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \\ &\quad \times \underbrace{\frac{1}{2^k k!} \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 D^{l-m}(x^2-1)^l D^{k+m}(x^2-1)^k dx}_{\text{次々と部分積分}} \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \underbrace{\frac{1}{2^k k!} \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 D^l(x^2-1)^l D^k(x^2-1)^k dx}_{\langle P_l, P_k \rangle = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}} \\ &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

■

§ 2.3 球面調和函数

定義 2.6

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (2.3.1)$$

という函数を、球面調和函数という。

球面調和函数は、

$$\hat{\Omega} Y_{l,m}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (2.3.2)$$

$$\left(\hat{\Omega} = \frac{\partial}{\partial(\cos\theta)} \left(\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial(\cos\theta)} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \quad (2.3.3)$$

を満たす.

性質 球面調和函数には, 以下の性質がある:

$$\bullet Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \quad (2.3.4)$$

$$\bullet \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \quad (\theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \phi + \pi) \\ \Rightarrow Y_{l,m}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (2.3.5)$$

$$\bullet \int d\Omega Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) \\ = \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta}_{\int_{-1}^1 d(\cos\theta)} \int_0^{2\pi} d\phi Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) \\ = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (2.3.6)$$

§ 2.4 ガンマ函数

定義 2.7

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\operatorname{Re} x > 0) \quad (2.4.1)$$

という函数 $\Gamma(x)$ をガンマ函数という.

ガンマ函数は以下のような性質を持つ:

$$\bullet \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.4.2)$$

$$\bullet \Gamma(1) = 1 \quad (2.4.3)$$

$$\bullet \Gamma(n+1) = n! \quad (n \text{ は非負整数}) \quad (2.4.4)$$

$$\bullet \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\because t = s^2 \text{ として Gauss 積分}) \quad (2.4.5)$$

注

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad (2.4.6)$$

$$\text{例} : \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi} \quad (2.4.7)$$

を用いて解析接続を行うと, $\text{Re}(z) < 0$ では $\Gamma(x)$ は $x = 0, -1, -2, \dots$ で 1 次の極を持つ.

§ 2.5 Bessel 函数

1.5 節で見たように, 円盤や円柱の動径方向の振動を表す微分方程式

$$f'' + \frac{1}{x}f' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)f = 0 \quad (2.5.1)$$

の解

$$f(x) = J_m(x) \quad (2.5.2)$$

を Bessel 函数という.

2.5.1 母函数表示

Bessel 函数の母函数表示は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = e^{\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)} \quad (2.5.3)$$

である. ただし t の負べき ($n < 0$) も含んでいる.(Laurent 展開)

右辺を展開:

$$e^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} = \dots \quad (2.5.4)$$

t^n の項を比較して,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (2.5.5)$$

注 $n < 0$ のとき, 分母に

$$(-|n|)!, (-|n| + 1)!, \dots \quad (2.5.6)$$

が出るが, それらは

$$(-m)! = \Gamma(-m) = \infty \quad (2.5.7)$$

により, 和に寄与しないと約束する.

2.5.2 性質

Bessel 函数には, 以下のような性質がある.

$$\bullet J_{-n}(x) = J_n(-x) \underbrace{=}_{(2.5.5) \text{ 式}} (-1)^n J_n(x) \quad (2.5.8)$$

$$\bullet e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} \quad (2.5.9)$$

$$\bullet J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) \quad (\text{Bessel の積分表示}) \quad (2.5.10)$$

$$\bullet J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(x) J_m(y) \quad (2.5.11)$$

証明 これらを示す.

- (2.2.1) 式より,

$$\begin{aligned} \sum_n J_{-n} t^{-n} &= e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} \\ &= e^{\frac{1}{2}(-x)(\frac{1}{t}-t)} \\ &= \sum_n J_n(x) \left(\frac{1}{t}\right)^n. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

- (2.5.3) 式で $t = e^{i\theta}$ とする.
- (2.5.9) 式に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta}$ をかけて, 積分する:

$$J_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{i(x \sin \theta - n\theta)}}_{\substack{\cos(\dots) + \\ \theta \text{ の奇函数より } 0}} d\theta \quad (2.5.13)$$

- (2.5.3) 式へ代入して，分解する．



2.5.3 一般の次数の Bessel 函数

べき展開 (2.5.5) 式で， $n \rightarrow \nu$ (\neq 整数) と一般化．

$$(k+n)! \rightarrow \Gamma(k+\nu+1), \quad (2.5.14)$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (2.5.15)$$

2.5.4 漸化式

漸化式は

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) \\ \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) \end{array} \right. \quad (2.5.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) \\ \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) \end{array} \right. \quad (2.5.17)$$

である．これらは (2.5.15) 式より示すことができる．これらを辺々引けば，

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) \quad (2.5.18)$$

も得られる．

2.5.5 微分方程式

$J_\nu(x)$ は，Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} u + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} u + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0 \quad (2.5.19)$$

の解である．

証明 (2.5.16) 式の両辺に $\frac{d}{dx} + \frac{\nu+1}{x}$ を作用させ，(2.5.17) 式を用いる．



物理では

$\nu = n$ の解 $J_n(x)$ 2 次元 $(\nu^2 + k^2) u(x) = 0$ の解 .

$$u(\rho, \phi) = J_n(k\rho)e^{\pm in\phi}. \quad (2.5.20)$$

$\nu = n + \frac{1}{2}$ の解 $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ 球 Bessel 函数

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (2.5.21)$$

は, 3 次元 $(\nu^2 + k^2) u(x) = 0$ の解 .

$$u(r, \theta, \phi) = j_l(kr)Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.5.22)$$

2.5.6 円柱函数

微分方程式 (2.5.19) は $\nu \rightarrow -\nu$ で不変なので, $J_\nu(x)$ と共に $J_{-\nu}(x)$ も解である . ゆえに, 一般解は

$$u(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \quad (2.5.23)$$

のほずである .

ところが, $\nu = n$ のとき

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.5.8)$$

なので, 独立でない . 独立な解として

$$N_\nu(x) = Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (2.5.24)$$

がある . (これは, $\nu \rightarrow n$ のときも有限である .) すると, 一般解は

$$u(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x) \quad (2.5.25)$$

とも書ける .

さらに，場合によっては

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \quad (2.5.26)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (2.5.27)$$

も用いる．

以上の函数は，

$J_\nu(x)$	Bessel 函数	第一種楕円函数
$Y_\nu(x) = N_\nu(x)$	Neumann 函数	第二種楕円函数
$H_\nu^{(1)}(x)$	第一種 Hankel 函数	第三種楕円函数
$H_\nu^{(2)}(x)$	第二種 Hankel 函数	

とまとめられ，全て同じ微分方程式・漸化式を満たす．

漸近形 ($x \rightarrow \infty$)

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.5.28)$$

$$Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.5.29)$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\pm i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (2.5.30)$$

2.5.7 零点と直交性

$$J_\nu(\alpha_{\nu,n}) = 0 \quad (2.5.31)$$

つまり， $J_\nu(x)$ の零点 $\alpha_{\nu,n}$ ($n = 1, 2, \dots$) について，次のような直交性が成立する：

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha_{\nu,n}x) J_\nu(\alpha_{\nu,m}x) x dx = \frac{[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})]^2}{2} \delta_{nm}. \quad (2.5.32)$$

2.5.8 変形 Bessel 函数

微分方程式 (2.5.19) 式で $x \rightarrow ix$ とした

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0 \quad (2.5.33)$$

の解は, 第一種 Bessel 函数

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu\left(e^{\frac{\pi i}{2}\nu} x\right) = 0 \quad (2.5.34)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (2.5.35)$$

と, 第二種 Bessel 函数

$$K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin \pi \nu} \quad (2.5.36)$$

である. それぞれの漸近形は

$$I_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \quad (2.5.37)$$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (2.5.38)$$

である.

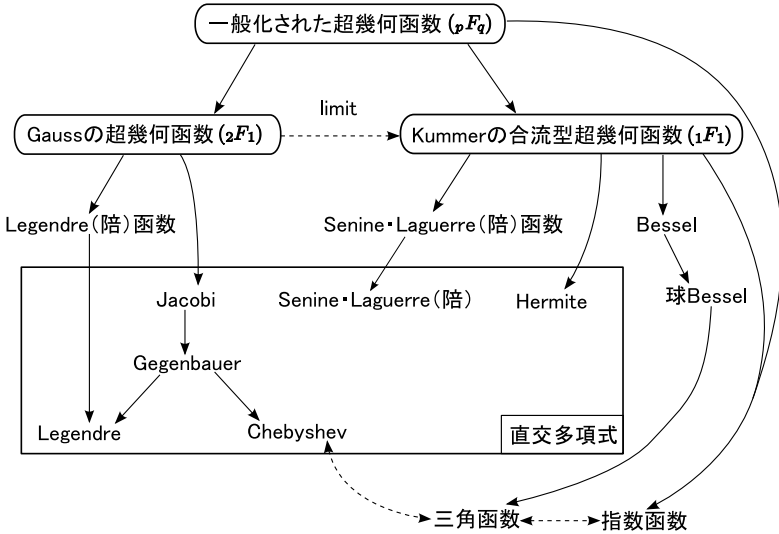
§ 2.6 超幾何函数

(Hyper Geometric Function ; HGF と略すこともある¹⁾)

2.6.1 超幾何函数の系統図

(参考: 岩波数学公式 III 巻
 $\begin{matrix} A \\ \downarrow \\ B \end{matrix}$ は, B が A のパラメータを特殊化したもので表されることを示す.)

1) 授業では HGF としていたようですが, このまとめでは超幾何函数と書きます.



2.6.2 Pochhammer の一般化された超幾何函数

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n x^n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n n!}. \quad (2.6.1)$$

ここで,

$$(\alpha)_n := \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} & (n > 0) \\ (\alpha)_0 = 1 & (n = 0) \end{cases} \quad (2.6.2)$$

$$\beta_i \neq 0, -1, \dots \quad (2.6.3)$$

例：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet {}_0F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\ \bullet {}_0F_1(x) : \text{ベッセル} \\ \quad 2.5.3 \text{ 節 (2.5.15) 式より} \\ \quad J_{\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} F\left(\nu+1; -\frac{x^2}{4}\right) \\ \bullet {}_2F_1(x) \longrightarrow \text{Gauss の超幾何函数 (2.6.3 節)} \\ \bullet {}_1F_1(x) \longrightarrow \text{Kummer の合流型超幾何函数 (2.6.4 節)} \end{array} \right.$$

2.6.3 Gauss の超幾何函数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) := {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (2.6.4)$$

微分方程式

$$x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0 \quad (2.6.5)$$

を満たす。

コメント 微分方程式 (2.6.5) は 3 点 $(0, 1, \infty)$ に確定特異点をもつ。

(確定特異点と級数解 略：時間切れ)

(2.6.5) 式の第二の解はやはり超幾何函数で書いて，

$$x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x). \quad (2.6.6)$$

(ただし γ が整数のときは別の扱いが必要 略)

子分たち

- Legendre (陪) 函数

$$\text{第一種 } P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1-x}{2}\right) \quad (2.6.7)$$

$$\text{第二種 } Q_{\nu}^{\mu}(x) = (\text{係数}) \frac{(x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}}{x^{\nu + \mu + 1}} F\left(-\frac{\nu + \mu + 1}{2}, \frac{\nu + \mu + 2}{2}, \frac{1}{x^2}\right) \quad (2.6.8)$$

- $\mu = 0$: Legendre 函数
- Legendre 多項式

$$P_l(x) = F\left(-l, l + 1, 1, \frac{1 - x}{2}\right) \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6.9)$$

注 (2.6.4) 式で $\alpha = -l$ のとき, $n \geq l + 1$ の項は,

$$(\alpha)_n = (\beta)_n = 0$$

となるため, $n = l$ で和が切れる. l 次多項式

- Jacobi 多項式

$$P_n(x) = (\text{係数}) F\left(-n, n + 1 + \alpha + \beta, 1 + \alpha, \frac{1 - x}{2}\right) \quad (2.6.10)$$

2.6.4 Kummer の合流型超幾何函数

$$F(\alpha, \gamma, x) := {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (2.6.11)$$

Gauss の超幾何函数で, $x = 1$ の確定特異点を $x = \infty$ に「合流」

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{\beta}\right) \quad (2.6.12)$$

微分方程式

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{du}{dx} - \alpha u = 0 \quad (2.6.13)$$

を満たす.

(2.6.13) 式の第二の解:

$$x^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; x) \quad (2.6.14)$$

γ が整数のときは別の扱いになる.

子分たち

- $F(\alpha, \alpha, \alpha) = {}_0F_0(x) = e^x$
- Sonin (Laguerre 陪) 函数

$$S_\nu^{(\alpha)} = (\text{係数}) \times F(-\nu, \alpha + 1, x) \quad (2.6.15)$$

$\nu = n$ とすれば、Sonin (Laguerre 陪) 多項式

- Bessel 函数

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{-ix} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ix\right) \quad (2.6.16)$$

- Hermite 多項式

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{2n}(x) = (-1)^n (2n - 1)!! F\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right) \end{array} \right. \quad (2.6.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n + 1)!! F\left(-n, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right) \times x \end{array} \right. \quad (2.6.18)$$

第 3 章

角運動量の代数的性質

古典論において角運動量は

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (3.1)$$

と定義される．これは量子力学において

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (3.2)$$

という演算子になる．

θ 方向の軸まわりに $|\theta|$ だけ回転する演算子は

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{J}}\right) \quad (3.3)$$

と書ける．この演算子は回転群を成す：

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta}_1) \circ \hat{U}(\boldsymbol{\theta}_2) = \hat{U}(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2). \quad (3.4)$$

例

$$\begin{aligned} \hat{U}(\alpha \mathbf{e}_3) &= \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \alpha \hat{J}_3\right) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \alpha \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\ &\stackrel{\text{球座標}}{=} \exp\left(-\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\hat{U}(\alpha \mathbf{e}_3) f(r, \theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi - \alpha) \quad (3.6)$$

交換関係 角運動量演算子の各成分の間には，

$$[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\hbar \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \hat{J}_c \quad (3.7)$$

なる交換関係がある．簡潔にするために $\hat{J}_a = \hbar \hat{j}_a$ と置き換えれば，

$$[\hat{j}_a, \hat{j}_b] = i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \hat{j}_c \quad (3.8)$$

となる．

いったん \hat{j}_a の具体形は無視して， \hat{j}_a が (3.8) 式を満たす Hermite 演算子であるという事実のみから，以下のことが言える．

\hat{j}_3 と $\hat{j}^2 = \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + \hat{j}_3^2$ の同時固有状態 $|\psi\rangle$ がとれて，

$$\begin{cases} \hat{j}^2 \text{の固有値は } j(j+1) & (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots) \\ \hat{j}_3 \text{の固有値は } m & (m = -j, -j+1, \dots, j) \end{cases}$$

となる．つまり， $|\psi\rangle = |j, m\rangle$ と書いて，

$$\hat{j}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad (3.9a)$$

$$\hat{j}_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (3.9b)$$

となる．

具体例：Pauli 行列 $\hat{J} = \hat{r} \times \hat{p}$ の場合，

$$\hat{j}_3 = -i \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \hat{j}^2 = -\hat{\Omega}(\theta, \phi), \quad |j, m\rangle = Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (3.10)$$

である．角運動量演算子を，Pauli 行列 $\hat{\sigma}_i$ によって

$$\hat{J}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i, \quad (3.11)$$

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

とすれば，

$$\hat{j}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{j}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

であるから，

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

のようになる．

Memo.

Memo.

Memo.

著者略歴

- 1989 年 日本に生まれましたとさ
- 2008 年 東京大学に無事入学しましたとさ
- 2009 年 理物シス創に進学しましたとさ
- 2010 年 こんなものをつくってしまいましたとさ

物理数学 II

2010 年 5 月 5 日 最新版発行

著 者 unknown (<http://@@@>)

著作権は筆者にあり，無断改変・販売を禁じます．

詳細はクリエイティブ・コモンズ ([BY-NC-ND](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)) を参照して下さい．

©2010- unknown

Edited in Japan