授業ノート ～解析力学～

根本夏紀 840762c

2009 年 11 月 24 日

目次

1　ニュートンの法則からラグランジュ形式へ

1.1　ニュートンの法則

ここでは，簡単にニュートンの法則を紹介し，各々が何を意味しているのかを説明したいと思います．

［要請 1］第一法則 (慣性の法則)
力を受けない質点は慣性系において等速直線運動を行う．

第一法則が主張することは読んだそのままのことですが，それだけではなく，暗にこの法則が成立する「慣性系」の存在を主張するものともなっています．

［要請 2］第二法則 (運動方程式)
慣性系においては運動量の時間微分は力に等しい．すなわち，次式 (運動方程式) が成立する．[*1]

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\left(= m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

第二法則は見ての通り運動方程式ですが，これは力を定義する定義式ではないことに注意してください．

［要請 3］第三法則 (作用・反作用の法則)
2 つの物体 1 と 2 のみが互いに力を及ぼしあっているとき 1 に働く力 $\boldsymbol{F}_1$ と 2 に働く力 $\boldsymbol{F}_2$ には

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \tag{1.2}$$

という関係式が成り立つ．

第二法則と第三法則を合わせると運動量保存則が導かれます．(1.1) を (1.2) に代入して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{0} \tag{1.3}$$

$$\therefore \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

(1.4) をさらに一般化すると，N 個の質点からなる系が外力を受けていないとき

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

が成り立ちます．

1.2　ガリレイ変換

ニュートン力学では「時間」の概念は絶対的なものです．逆に，空間座標は相対的に決まります．実際，1 つの慣性系から別の慣性系を無数に定義できます．

---

*1 授業ではベクトルとして $\vec{r}$, $\vec{p}$ 等を使っていましたが，ここでは bold 体 ($\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ 等) を使うことにします．また，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f$$

です．

慣性系 S に対して一定速度 $\boldsymbol{V}$ で運動している座標系 S' を考えます. 時間座標 t は共通です. ある質点を 2 つの座標系で観測します. S, S' で観測した質点のそれぞれの位置座標を $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t)$ であらわすとき, ガリレイ変換は

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t \tag{1.6}$$

で与えられます.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{V} \\ \therefore \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \quad \Longrightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.8}$$

したがって物理法則の同じ S' も同じ慣性系であると言えます. ここから**ガリレイの相対性原理**と呼ばれる次の法則が導かれます.

[定理 1.2.1] ガリレイの相対性原理 (Galileo's relativity principle)
ニュートン力学はガリレイ変換に対して不変である. [*2]

1.3 オイラー・ラグランジュ方程式

質点に働く力がポテンシャルエネルギー U の座標微分で与えられるとします.

$$\boldsymbol{F}_i = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}{\partial \boldsymbol{r}_i} \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{1.9}$$

このような力を**保存力** (conservative force) と言います. また運動エネルギーを T としてエネルギーの次元をもつ**ラグランジアン**を次式で定義します.

$$L \equiv T - U \tag{1.10}$$

ラグランジアン L はしたがって各質点の座標と速度に依存した関数となります. [*3] ラグランジアン L を用いると運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \boldsymbol{0} \tag{1.11}$$

と書けます. これを (デカルト座標における) オイラー・ラグランジュ方程式といいます.

1.4 一般化座標と拘束条件

前節では各質点の座標を $\{\boldsymbol{r}_i\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ であらわしましたが, この節ではこれをスカラー表記にして $\{x_i\}$ $(i = 1, \ldots, 3N)$ であらわすことにします. [*4] さて

$$x_i = f_i(q_1, \ldots, q_{3N}, t) \tag{1.12}$$

[*2] 電磁気学はガリレイ変換に対して不変になりません.
[*3] つまり

$$L = L(\{\dot{\boldsymbol{r}}_i\}, \{\boldsymbol{r}_i\})$$

となります.
[*4] 勿論, これもデカルト座標による表記であることに変わりはありません.

という関係で結びつけられている独立な座標 $\{q_i\}$ を**一般化座標**と言います. [*5]

このとき, 拘束条件 (constraints) はこの一般化座標が満たすべき数式という形であらわすことができます. 具体的には拘束条件が R 個あるとき, それは

$$h_r(q_1, \ldots, q_{3N}, t) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, R) \tag{1.13}$$

とあらわせます. このとき自由度は $3N - R$ となります. 特に, 拘束条件が座標と時間のみで決まるとき, そのような拘束条件を**ホロノミック (holonomic) な拘束条件**と呼び, 系内部の拘束条件全てがホロノミックであるような系を**ホロノーム系**と呼びます.

1.5 ダランベールの原理

静的つり合いが保たれている系を考えます. この場合, すべての質点に働く力がゼロなので,

$$F_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 3N) \tag{1.14}$$

独立な微小変位 $\{\delta x_i\}$ $(i = 1, \ldots, 3N)$ を用いると次式が成立します.

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = 0 \tag{1.15}$$

また動いている質点系においても慣性力を含めて考えることで静力学的とみなすことができます.

$$F_i - \underbrace{m_i \ddot{x}_i}_{\text{慣性力}} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 3N)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0 \tag{1.16}$$

ただし拘束条件が与えられているときには $\{\delta x_i\}$ は独立に選ぶことができなくなります. この場合, 拘束条件を満たすために必要な力, 拘束力 (force of constraints) が働いていると考えられます. もともと働いていた外力を F_i^a, 拘束力を F_i^c と書くと, $F_i = F_i^a + F_i^c$ を (1.16) に代入することで

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i^a - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + \sum_{i=1}^{3N} F_i^c \delta x_i = 0 \tag{1.17}$$

特に, 第二項 $\sum_{i=1}^{3N} F_i^c \delta x_i$ が 0 である場合には[*6] (1.16) と同様に

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i^a - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0 \tag{1.18}$$

が成立します. これを**ダランベールの原理**と言います.

1.6 ホロノーム系におけるラグランジュ方程式

以下, 拘束条件の数を R, 系の自由度を $3N - R = K$, 独立な一般化座標を $\{q_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ で表すことにします. このとき, 微小変位 δx_i はテイラー展開の一次近似をとることで

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad (i = 1, \ldots, 3N) \tag{1.19}$$

[*5] なじみ深い一般化座標の例として極座標があると思います.

[*6] 剛体の場合や斜面上の質点が摩擦力を受けずに運動する場合等が該当します.

と書けます. これを (1.16) に代入して

$$\sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{K}(F_i^a - m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k = 0 \tag{1.20}$$

左辺第一項が保存力の場合,

$$\sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{K}\left(-\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k = -\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \tag{1.21}$$

第二項については

$$\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) - \dot{x}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$

ここで $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k} = \dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$ と $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k} = \dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$ を用いれば

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial(\dot{x}_i^2)}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial(\dot{x}_i^2)}{\partial q_k} \tag{1.22}$$

これを使って

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{K}m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k &= \ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{m_i}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(\dot{x}_i^2)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(\dot{x}_i^2)}{\partial q_k}\right)\delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^{K}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)}_{=T}\right]\delta q_k \end{aligned} \tag{1.23}$$

(1.20) に (1.21) と (1.23) を代入して

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\frac{\partial U}{\partial q_k} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)T\right]\delta q_k = 0$$

ここで $L = T - U$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0 \tag{1.24}$$

(1.24) が任意の δq_k について成立するので,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{1.25}$$

が成り立ちます. (1.25) を**オイラー・ラグランジュ方程式**と呼びます. ラグランジュ方程式はどのような一般化座標に対しても同じ形の方程式となるため, デカルト座標以外で運動方程式を立てるときに非常に便利な式となっています.

[問 1.1] $T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2$ を用いてラグランジュ方程式 (1.11) からニュートン方程式が得られることを示せ.

[問 1.2] 単振子の振れの角度 θ を変数としてラグランジアンを記述し, 運動方程式を求めよ. (適当に必要な定数をおいてよい)

[問 1.3] 二重振子の場合について適当に変数, 定数をおいてラグランジアンを記述し, 運動方程式を求めよ.

2　最小作用の原理

1 章ではニュートンの法則をもとにしてラグランジュ方程式を導くという形をとりましたが, この章では**最小作用の原理**と呼ばれる要請からラグランジュ方程式を導き, ニュートンの運動方程式を与えるという形式をとってみたいと思います.

2.1　最小作用の原理 (ハミルトンの原理)

最小作用の原理の主張は次のようなものです.

[要請] 最小作用の原理

物理系はラグランジアンと呼ばれる座標とその時間微分, (および時間) の関数

$$L = L(q, \dot{q}, t) \tag{2.1}$$

で特徴づけられる.

その系が時刻 $t = t_0,\ t_1$ でそれぞれ $q = q(t_0),\ q(t_1)$ の位置にあるとする. 時刻 t $(t_0 < t < t_1)$ において, 系は作用 (action) と呼ばれる次の量

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

が最小となるような経路 $q = q(t)$ を運動する.

2.2　オイラー・ラグランジュ方程式の導出

以上の要請から実際にオイラー・ラグランジュ方程式を導いてみます.

作用 S を最小にする経路を $q(t)$, そこから少しずれた経路 $q(t) + \delta q(t)$ と書き, それぞれの経路におけるの作用を $S,\ S + \delta S$ とします. [*7]まず, それぞれの経路の端点は一致するはずなので

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0 \tag{2.3}$$

が成立します. このとき δS について

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \Big\} \mathrm{d}t \\
&\simeq \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right\} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

第二項を部分積分して

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \bigg|_{t_0}^{t_1}}_{=0} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right\} \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \mathrm{d}t = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

[*7] δS を q に関する変分というらしいです.

(2.4) が任意の微小変位 δq に対して成立するので

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.5}$$

こうしてオイラー・ラグランジュ方程式が導かれました.

なお, ラグランジアンに座標と時間を含む任意の関数 $\Lambda(q,t)$ の時間による全微分を加えても得られる方程式は同じになります. つまり,

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} \tag{2.6}$$

と L' を定義しても得られる方程式は L の場合と変わらないということです.

ここでニュートンの運動方程式に対するラグランジュ形式の利点を挙げておきます.

1. 力学系が複数の方程式ではなく, 1 つのラグランジアンによって特徴づけられる.
2. これは近似を導入するときに重要で, 方程式 1 つ 1 つではなくラグランジアンに近似を導入することで各運動方程式の無矛盾性が保たれる.
3. ラグランジアンが時間の一階微分までしか含まないので変数変換が容易.
4. 束縛条件を考慮するのが容易.
5. 物理系の対称性と保存則の関係が明らか. [*8]
6. (おまけ) 力学系だけでなく, 電磁気系や素粒子まで統一的に扱うことができる.
7. さらにハミルトン形式にすると, 量子力学への移行が容易.

次節ではラグランジアンがどんな形をした関数であるのかを (ニュートンの法則をもとにした 1 章の内容を忘れて) 考察したいと思います.

2.3 自由粒子のラグランジアン

まずは 1 個の自由粒子のラグランジアンを考察します.

力学系の運動法則は異なる座標系では一般に異なる形をとるわけですが, ここでは力学現象の法則が最も簡単な形をとる座標系を選んで考えることにします. そこで, 空間が一様等方で, 時間が一様な座標系, 慣性系[*9]を選ぶことが適当であると考えられます. 慣性系において,

1. 空間の一様性と時間の一様性から
   $\Longrightarrow$ ラグランジアン L は質点の座標 $\boldsymbol{r}$ と時間 t を含まない関数となります.
   $$L = L(\boldsymbol{v}) \tag{2.7}$$
2. 空間の等方性から
   $\Longrightarrow$ L は $\boldsymbol{v}$ の絶対値 v, あるいは v^2 の関数となります.
   $$L = L(v^2) \tag{2.8}$$

[*8] これについては 3 章でくわしく述べます.
[*9] 逆に「慣性系とは空間が一様等方で, 時間が一様な座標系である」と定義することができると思います.

また, オイラー・ラグランジュ方程式から

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}}_{=\boldsymbol{0}} &= \boldsymbol{0} \\
\therefore \frac{\partial L(v^2)}{\partial \boldsymbol{v}} &= \mathrm{const} \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

ここで L が v だけの関数なので $\boldsymbol{v} = \mathrm{const}$ が決まります.[*10]

次に, 系の運動法則がガリレイ変換に対して不変であることから $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\epsilon}$ として (ただし $\boldsymbol{\epsilon}$ は微少であるとします)

$$
\begin{aligned}
L' = L({v'}^2) &= L(v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \epsilon^2) \\
&\simeq L(v^2) + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\frac{\partial L}{\partial\left(v^2\right)} \\
&= L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial\left(v^2\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\right) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

ここで (2.10) の第二項が座標と時間を含む時間の全微分でなければならないので,

$$
\frac{\partial L}{\partial\left(v^2\right)} = \mathrm{const} = \frac{1}{2}m \qquad (2.11)
$$

これが (質点の) 質量 m の定義式です.

$$
\therefore L = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.12)
$$

逆に $L = \dfrac{1}{2}mv^2$ であれば任意のガリレイ変換 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}$ に対して

$$
\begin{aligned}
L' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{1}{2}mV^2 \\
&= L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{m\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{1}{2}mV^2 t\right\} \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

となり, 運動法則が変化しないことがわかります.

最後に物理学一般に成り立つと思われる重ね合わせの原理を要請に加えておきます.

[要請] ラグランジアンの加法性

相互作用していない自由粒子 A, B のラグランジアンを L_A, L_B と書くとき, 全系のラグランジアンは

$$
L = L_A + L_B \qquad (2.14)
$$

と書ける.

上の要請を任意の数の (相互作用していない) 自由粒子に対して適用することで

$$
L = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2 \qquad (2.15)
$$

を得ますが, ここで初めて質量 m_a は物理的な意味を持つようになります. すなわち

$$
m_a \text{ に定数をかける} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{質量単位の変更}
$$

また, 質量に関してですが, $m < 0$ のとき, 作用 $S = \int L\mathrm{d}t$ の最小値が ($-\infty$ となって) 存在しなくなってしまうため $m > 0$ が必要であることが分かります.

[*10] このように**慣性の法則**が導かれます.

2.4　相互作用する質点からなる孤立系のラグランジアン

相互作用する質点からなる孤立系でのラグランジアンは各質点の運動を記述する項 $\sum_a \dfrac{1}{2}m_a v_a^2$ と相互作用をあらわす項 $-U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots)$ の和として表せます.

$$L = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots) \tag{2.16}$$

まず, (2.16) のラグランジアンが $t \to -t$ という変換に対して不変であることから運動が可逆的であることがわかります.

これをラグランジュ方程式に代入して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0$$

$$\therefore m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \quad (= \boldsymbol{F}_a) \tag{2.17}$$

この $\boldsymbol{F}_a$ が a 番目の質点に働く力となります.

一般化座標においては $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_K)$ として

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{2.18}$$

これを次式に代入して

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2}m_i \dot{x}_i^2 - U(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) \\ &= \sum_{k,l} \frac{1}{2}a_{kl}(q_1, q_2, \dots, q_K)\dot{q}_k\dot{q}_l - U(q_1, \dots, q_K) \end{aligned} \tag{2.19}$$

ただし $a_{kl} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_l}$ です. (2.19) は後で使うと思うのでご注意ください.

［問 2.1］ 質量 m_1 の単振子の支点が質量 m_2 の質点で水平方向になめらかに動く. 適当に定数, 変数を導入してこの系のラグランジアンと運動方程式を求めよ.

3 対称性と保存則

$\{q_k\}$ と $\{\dot{q}_k\}$ のある関数 C が力学系の運動を通じて一定となることがあります.

$$C(\{q_k\},\{\dot{q}_k\}) = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

これらは**運動の積分** (integrals of motion), 運動の定数 (constant of motion), あるいは**保存量** (conserved quantities) と呼ばれ, 系の運動を理解する上で重要です. ラグランジアンが何らかの対称性を持つ場合, それに対応する保存量が存在します. *11

3.1 時間の一様性とエネルギー

考えている孤立系が時間に対する並進対称性を有するとき, ラグランジアンは時間に依存しない形をとります. したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) && (3.2)\\
&= \sum_{k=1}^{K}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right\}\\
&= \sum_{k=1}^{K}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) && (3.3)
\end{aligned}$$

以上から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)}_{=E} = 0 \tag{3.4}$$

(3.4) で E と書いた関数は運動の積分となることがわかりました. この E を**エネルギー**と呼びます. L が加法性を持つことから, E についての加法性もいえます. また, これまでの議論から次の法則が導かれます.

［定理 3.1.1］エネルギー保存則 (energy conservation law)
ある孤立系を記述するラグランジアンが時間に依存しないとき, 系のエネルギー

$$E = \sum_{k=1}^{K}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = T + U \tag{3.5}$$

は保存する. *12

エネルギー保存則は孤立系だけでなく, 外部の場が一定で時間依存しない場合にも成り立ちます. エネルギー保存則が成り立つ系を保存系を呼びます.

*11 これを**ネーターの定理**と言います.
*12 (3.5) の最右辺については後で説明します.

一般に孤立系のラグランジアンは $L = T - U(q_1, \ldots, q_K)$ と $T = \frac{1}{2}\sum_{l,m} a_{lm}(q_1, \ldots, q_K)\dot{q}_l\dot{q}_m$ を用いて, [*13]

$$
\begin{aligned}
\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k &= \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{l,m} a_{lm}\dot{q}_l\dot{q}_m\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \dot{q}_k \sum_{l,m} a_{lm}\left(\delta_{kl}\dot{q}_m + \delta_{km}\dot{q}_l\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \dot{q}_k \left(2\sum_l a_{kl}\dot{q}_l\right) \\
&= \sum_{k,l} a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l = 2T
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

したがって

$$
E = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = 2T - L = T + U \tag{3.7}
$$

となります. (3.5) で書いていたのはこのことです.

3.2　空間の一様性と運動量

孤立系が系全体の平行移動に関して不変である場合の運動の積分を考えます. 平行移動を $\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\epsilon}$ と書くことにします. ひとまず $\boldsymbol{\epsilon}$ は微小であるとして

$$
\delta L = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}\cdot\delta\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{\epsilon}\cdot\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0 \tag{3.8}
$$

(3.8) が任意の $\boldsymbol{\epsilon}$ に対して成立するので

$$
\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = -\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{0} \tag{3.9}
$$

特に系内部に 2 つの質点しかないとき

$$
\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0} \tag{3.10}
$$

という作用・反作用の法則が導かれます. また

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_a} \tag{3.11}
$$

[*13] ご承知のこととは思いますが, 途中で出てくる δ_{km} 等はクロネッカーのデルタと呼ばれる変数で

$$
\delta_{km} = \begin{cases} 1 & (k = m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases}
$$

となります.

と変形することで

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\underbrace{\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_a}}_{=\boldsymbol{p}}\Bigg) = \boldsymbol{0} \tag{3.12}$$

が得られます. (3.12) で定義した運動の積分 $\boldsymbol{p}$ を全運動量, $\boldsymbol{p}_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_a}$ を**運動量**と呼びます.

例えば, 自由粒子の場合を考えてみると

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \\ \boldsymbol{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

ですので, ニュートン力学で考えていた「運動量」と運動の積分としての運動量が一致することがわかります.

また, ポテンシャルエネルギーがデカルト座量のある成分に依存しなければ, 運動量のその成分は保存します.

一般化運動量と一般化力をそれぞれ (3.14), (3.15) によって定義します.

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.14}$$

$$F_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{3.15}$$

これを使うとラグランジュ方程式は (ニュートンの運動方程式のように)

$$\dot{p}_k = F_k \tag{3.16}$$

と書くことができます.

3.3 空間の等方性と角運動量

あるベクトルのまわりに微小角 $\delta\varphi$ だけ系を回転させるという操作に対して不変であることを仮定してみます.

この操作は $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}$ と書けます.[*14] ラグランジアンの微小変化分を δL と書くことにしますと,

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}\delta\boldsymbol{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_a}\delta\dot{\boldsymbol{r}}_a\right) \\ &= \sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}(\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_a) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_a}(\delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_a)\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

[*14] ここで $\delta\boldsymbol{\varphi}$ とは回転軸となるベクトルと平行で, 大きさは $\delta\varphi$ であるようなベクトルです.

ベクトルの変換公式 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{a=1}^{N}\left(\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\left(\boldsymbol{r}_a\times\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_a}\right)+\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{r}}_a\times\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_a}\right)\right) && (3.18)\\
&=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{a=1}^{N}\left(\boldsymbol{r}_a\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_a}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_a}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p}_a\right) && (3.19)\\
&=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{a=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a\right)=0 && (3.20)
\end{aligned}
$$

(3.20) が任意の $\delta\boldsymbol{\varphi}$ に対して成立するはずなので,

$$
\boldsymbol{J}=\sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a \tag{3.21}
$$

で定義される**全角運動量** $\boldsymbol{J}$ は保存量となります.

なお, 角運動量は一般には原点の選び方に依存します. つまり $\boldsymbol{r}_a\to\boldsymbol{r}'_a=\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{R}$ としたとき, 変換後の角運動量 $\boldsymbol{J}'$ について

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}'&=\sum_{a=1}^{N}\{(\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{p}_a\}\\
&=\sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a+\boldsymbol{R}\times\underbrace{\sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{p}_a}_{=\boldsymbol{p}} && (3.22)\\
&=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{p} && (3.23)
\end{aligned}
$$

ただし, (3.23) からわかるように, 全運動量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ の場合には原点の選び方に依存しなくなります.

また外場が存在するときには, 外場がある軸について対称であれば角運動量のその軸への射影は保存します.

中心対称な場[*15]の中での運動では, 場の中心を原点として定義された角運動量が保存します.

3.4 循環座標

ラグランジアンに陽に含まれない一般化座標は**循環座標** (cyclic coordinates) と呼ばれます. 例えば q が循環座標であるとき, q についてのラグランジュ方程式を考えることでただちに, 循環座標 q に共役な一般化運動量 $p=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}}$ は運動の積分となることがわかります.

3.5 ネーターの定理

一般化座標 q に対してあるパラメータ s で記述される変換 $q(s)$, $\dot{q}(s)$ を考えることにします. ただし $q(0)=q$, $\dot{q}(0)=\dot{q}$ が満たされるものとします.

[*15] 中心対称な場とはすなわち, 場のポテンシャルエネルギーが $U(r)$ のように距離のみの関数として書けることを意味します.

ラグランジアンがこの変換に対して (特に $s \to 0$ の極限で) 不変であるための条件を考えると

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(q(s),\dot{q}(s))}{\partial s} &= \frac{\partial L}{\partial q(s)}\frac{\partial q(s)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(s)}\frac{\partial \dot{q}(s)}{\partial s} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q(s)}\frac{\partial q(s)}{\partial s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(s)}\frac{\partial q(s)}{\partial s}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(s)}\right)\frac{\partial q(s)}{\partial s} \end{aligned} \tag{3.24}$$

第一項と第三項が打ち消しあうので

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(s)}\frac{\partial q(s)}{\partial s}\right) \tag{3.25}$$

つまり一般に

$$I = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial L(q_k(s),\dot{q}_k(s))}{\partial \dot{q}_k(s)}\frac{\partial q_k(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \tag{3.26}$$

は保存量となります.

［例 3.5.1］空間の一様性

デカルト座標において x 方向への並進変換 $x_a(s) = x_a + s$ を考えます. このとき保存量は

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a(s)}\frac{\partial x_a(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \\ &= \sum_{a=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_a(s)}\left(\sum_a \frac{1}{2}m_a\dot{x}_a(s)^2 - U(\boldsymbol{r})\right)}_{=m_a\dot{x}_a(s)} \underbrace{\frac{\partial x_a(s)}{\partial s}}_{=1}\Bigg|_{s=0} \\ &= \sum_{a=1}^{N} m_a\dot{x}_a \quad (= p_x) \end{aligned} \tag{3.27}$$

となります.[*16]

［問 3.1］単振動のラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$ からエネルギー E を求めよ.

［問 3.2］質量 m の質点 1 つからなる系を考える. z 軸方向を向いた一様な場 $U(z)$ があるとき角運動量の z 成分が保存されることを示せ.

［問 3.3］中心力場 $U(\boldsymbol{r}) = U(r)$ 中での質量 m の質点の運動を考える.

(i) 一般化座標として極座標 (r,θ,φ) を選ぶ. 微小変位 $d\boldsymbol{r}$ の r 成分, θ 成分, φ 成分を考えることにより, $\boldsymbol{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$ を示せ.

(ii) 系のラグランジアンを求め, ラグランジュ方程式をたてよ. またこの系の保存量を述べよ.

(iii) 原点まわりの角運動量 $\boldsymbol{J}$ が保存することから質点の運動は同一平面内に限られることが分かる. $\theta = \frac{\pi}{2}$ として, また (ii) で求めた保存量を C として変数を消去することで r が満たすべき方程式を求めよ.

---

*16 当たり前ですが, p_x は x 軸方向の運動量です.

4　さまざまな系のラグランジアン

4.1　回転座標系とコリオリ力

z 軸のまわりを角速度 ω で回転している座標系 (x',y',z') について考えます. このとき静止している座標系との間の関係は

$$\begin{cases} x &= x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ y &= x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \\ z &= z' \end{cases} \tag{4.1}$$

となります. したがって運動エネルギー T について

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x'}^2+\dot{y'}^2+\dot{z'}^2) + m\omega(x'\dot{y}'-y'\dot{x}') + \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2+y'^2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

さらに U は (x',y',z') だけの関数とします. $L=T-U$ についてラグランジュ方程式をたてると

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}'-m\omega y') + \frac{\partial U}{\partial x'} - m\omega^2 x' - m\omega\dot{y}' \\ &= m\ddot{x}' - 2m\omega\dot{y}' - m\omega^2 x' + \frac{\partial U}{\partial x'} = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

同様にして

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y'} = m\ddot{y}' + 2m\omega\dot{x}' - m\omega^2 y' + \frac{\partial U}{\partial y'} = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial z'} = m\ddot{z}' + \frac{\partial U}{\partial z'} = 0 \tag{4.5}$$

となります. したがって

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = -\dfrac{\partial U}{\partial x'} & +2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \\ m\ddot{y}' = -\dfrac{\partial U}{\partial y'} & -2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y' \\ m\ddot{z}' = -\dfrac{\partial U}{\partial z'} & \underbrace{\hphantom{-2m\omega\dot{x}'}}_{\text{コリオリ力}}\ \underbrace{\hphantom{+m\omega^2 y'}}_{\text{遠心力}} \end{cases} \tag{4.6}$$

(4.6) の第二項をコリオリ力, 第三項を遠心力と言います. コリオリ力は

$$\boldsymbol{f} = 2m\left(\dot{\boldsymbol{r}}' \times \boldsymbol{\omega}\right)$$

とも書けます. したがって速度 $\dot{\boldsymbol{r}}'$ に垂直となるため仕事をしません.

4.2　ローレンツ力

電荷 e の粒子が電場 $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{r}}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$ のもとで運動するとき, 粒子はローレンツ力 $\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)$ を受けます. $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ とすると

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -e\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - eB\dot{x} \\ m\ddot{z} = -e\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} \end{cases} \tag{4.7}$$

が成立します. 回転座標系でのラグランジアンから類推すると, このような方程式をもたらすラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\frac{eB}{2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) - e\Phi \tag{4.8}$$

$$\tag{4.9}$$

となることが予想されます. ここで $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ なる量を導入します.[*17] 特に今の場合には, $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$ とすれば $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B)$ とできます. これを用いて,

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + e(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) - e\Phi \tag{4.10}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - e\Phi \tag{4.11}$$

逆に, このラグランジアンから運動方程式をつくると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{x} + eA_x\right) \\ &= m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - e\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{4.13}$$

(4.12), (4.13) をラグランジュ方程式に代入して

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -e\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \\ &\quad + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - e\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &= -e\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) - e\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\dot{y} + e\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\dot{z} \\ &= -e\left(\nabla\Phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_x + e\dot{y}\left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\right)_z - e\dot{z}\left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\right)_y \\ &= e\underbrace{\left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)}_{=\boldsymbol{E}}{}_x + e\big(\dot{\boldsymbol{r}} \times \underbrace{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}}_{=\boldsymbol{B}}\big)_x\end{aligned} \tag{4.14}$$

同様にして y, z についても式をたてると

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E} + e\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{4.15}$$

が導かれます. よって類推したラグランジアンは正しそうであるとわかります.

4.3 散逸 (抵抗) のある系

ここではエネルギーの散逸がある系について考えます. 速度に比例する抵抗力 $F_i = -\alpha\dot{x}_i$ が存在するとき, 微小変位 δx_i の間に抵抗力がする仕事 δW は

$$\delta W = -\sum_{i=1}^{3N}\alpha\dot{x}_i\delta x_i \tag{4.16}$$

*17 $\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれています.

となります. ここで単位時間当たりにエネルギーが失われる割合を表す関数として δW を δt で割って係数を半分にした「散逸係数」D を導入します.

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} \alpha \dot{x}_i^2 \tag{4.17}$$
$$F_i = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}$$

このときニュートンの運動方程式は

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F_i \tag{4.18}$$

ですので, ラグランジュ方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{4.19}$$

と書けます. 一般化座標においては

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{K} F_k \delta q_k \tag{4.20}$$

ただし F_k を一般化摩擦力として

$$F_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \tag{4.21}$$

が成立します. したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{4.22}$$

となります.

［問 4.1］地球の赤道上を $v = 1\mathrm{m/s}$ で動く物体に働くコリオリ力の大きさを求めよ.

5 ハミルトン形式と正準変換

この章でやることは一般化運動量 $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ を用いてラグランジアン $L(q, \dot{q})$ をハミルトニアンと呼ばれる関数 $H(p, q)$ に変換することです. *18

5.1 ルジャンドル (Legendre) 変換

それでは変換の方法を説明します. 2 変数関数 $f = f(x, y)$ が与えられたとき x, y の代わりに u, y を変数とする関数 $g(u, y)$ を考えます. ただし $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ であるものとします. このとき

$$g(u, y) = xu - f(x, y) \tag{5.1}$$

とすればこの全微分は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g &= \mathrm{d}(xu) - \mathrm{d}f \\ &= u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \\ &= x\mathrm{d}u - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.2}$$

となり, g が実際に u, y を変数とする関数であることがわかります. このような $f \to g$ の変換を**ルジャンドル変換**と呼びます. *19

5.2 ハミルトニアン

前節でのルジャンドル変換をラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ に適用します. 一般化運動量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ に対して**ハミルトニアン** H は

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^{K} p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t) \tag{5.3}$$

と表されます.

[例 5.2.1] 調和振動子のハミルトニアン
調和振動子のラグランジアンが

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \tag{5.4}$$

と書けるのでハミルトニアンは $p = m\dot{q}$ として

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \tag{5.5}$$

と書けます.

x_i や q_k の関係に t があらわに入っていない場合には

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k p_k \dot{q}_k \\ \therefore H &= 2T - L = 2T - (T - U) = T + U \end{aligned} \tag{5.6}$$

---

*18 簡単のため, $L(q_1, \ldots, q_K, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_K)$ を $L(q, \dot{q})$ と表記します.
*19 正確には f と g が一対一で対応するための条件等が必要になりますが, ここではそのあたりのことは省略します.

このとき H は $q_1,\dots,q_k,p_1,\dots,p_k$ の関数となります. この $2K$ 個の変数によって作られる空間のことを位相空間と呼びます.

また特に $H=T+U=E=\mathrm{const}$, つまり全エネルギーが保存するときには周期的な運動は位相空間と閉じた線 (輪) で表現されます.

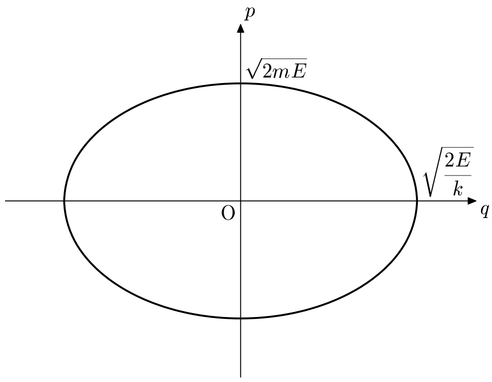

図 1 ［例 5.2.1］の場合の位相空間

5.3 正準方程式

ここではニュートンの運動方程式やラグランジュ方程式に対応するものをハミルトン形式で考えてみたいと思います. まず, $\mathrm{d}L$ について

$$\mathrm{d}L=\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}\dot{q}_k \tag{5.7}$$

ここで $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=p_k$ であり, ラグランジュ方程式により $\dfrac{\partial L}{\partial q_k}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\dot{p}_k$ ですので

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L&=\sum_{k=1}^{K}\dot{p}_k\mathrm{d}q_k+\sum_{k=1}^{K}p_k\mathrm{d}\dot{q}_k &(5.8)\\&=\sum_{k=1}^{K}\dot{p}_k\mathrm{d}q_k+\sum_{k=1}^{K}\bigl\{\mathrm{d}(p_k\dot{q}_k)-\dot{q}_k\mathrm{d}p_k\bigr\} &(5.9)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathrm{d}(p_k\dot{q}_k-L)}_{=\mathrm{d}H}&=-\sum_{k=1}^{K}\dot{p}_k\mathrm{d}q_k+\sum_{k=1}^{K}\dot{q}_k\mathrm{d}p_k &(5.10)\\&=\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial H}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial H}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k &(5.11)\end{aligned}$$

(5.10) と (5.11) を比較することで次式 (**正準方程式**) を得ます.

$$\begin{cases}\dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k}\\[2mm]\dot{q}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}\end{cases} \tag{5.12}$$

(5.12) はハミルトン方程式とも呼ばれます. また, この方程式の変数 p, q を正準変数と呼びます.

あるいは最小作用の原理を考えることで (5.12) を導くこともできます.

$$\begin{aligned}\delta S=\delta\int L\mathrm{d}t&=\int\left\{\sum\delta(p_k\dot{q}_k)-\delta H\right\}\mathrm{d}t\\&=\int\left\{\sum\dot{q}_k\delta p_k+p_k\delta\dot{q}_k-\delta H\right\}\mathrm{d}t &(5.13)\end{aligned}$$

$\delta H = \sum \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \dfrac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right)$ ですので

$$
\begin{aligned}
&= \int \left\{ \sum \dot{q}_k \delta p_k + p_k \delta \dot{q}_k - \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right) \right\} \mathrm{d}t \\
&= \int \sum \left\{ \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k + \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right\} \mathrm{d}t \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

ここで $\delta S = 0$ により

$$
\begin{cases}
\dot{q}_k - \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \\
\dot{p}_k + \dfrac{\partial H}{\partial q_k} = 0
\end{cases}
$$

こうして (5.12) が導かれます.

正準方程式を使うと H が時間に陽に依存しない場合には (といっても今までの議論が H が時間に陽に依存しないことを前提にしていますが)

$$
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{=-\dot{p}_k} \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_k}}_{=\dot{q}_k} \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} \right) = 0 \qquad (5.15)
$$

というエネルギー保存則が導かれます.

5.4 正準変換と母関数

ラグランジアンは座標変換に対する共変性を持っていることは 1 章で説明しました. ハミルトニアンについてはこれほど強い共変性は言えないので変換後も正準方程式が成立するような変換 $p,\, q,\, t \to P,\, Q$ を見つけたいと思います. [*20] なお, 正準変数を $p,\, q$ とした時のハミルトニアンを H, 変換後の P, Q を正準変数とするハミルトニアンを H' と表記します. また, それぞれのハミルトニアンに対応するラグランジアンを $L,\, L'$ と表記します. 最小作用の原理より

$$
\begin{aligned}
\delta \int L \mathrm{d}t &= \delta \int L' \mathrm{d}t \\
\delta \int \{ p\dot{q} - H(p,q,t) \} \mathrm{d}t &= \delta \int \left\{ P\dot{Q} - H'(P,Q,t) \right\} \mathrm{d}t \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

ラグランジアンは関数 F の時間 t による全微分を付け加える自由度が存在するので

$$
\begin{aligned}
p\dot{q} - H(p,q,t) &= P\dot{Q} - H'(P,Q,t) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \\
\therefore p\mathrm{d}q - H(p,q,t)\mathrm{d}t &= P\mathrm{d}Q - H'(P,Q,t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}F \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

ここで出てくる関数 F のことを**母関数**と呼びます. (5.17) に少し細工をして次のように変形をします.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q + (H' - H)\mathrm{d}t \qquad (5.18) \\
\mathrm{d}(F + PQ) &= p\mathrm{d}q + Q\mathrm{d}P + (H' - H)\mathrm{d}t \qquad (5.19) \\
\mathrm{d}(F - pq) &= -q\mathrm{d}p - P\mathrm{d}Q + (H' - H)\mathrm{d}t \qquad (5.20) \\
\mathrm{d}(F - pq + PQ) &= -q\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}P + (H' - H)\mathrm{d}t \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

[*20] このような変換を**正準変換**と呼びます.

(5.18) を見れば F が q, $Q\,t$ の関数であることがわかりますが, それ以降の変形 (5.19)〜(5.21) から母関数は p, P などを変数とすることができるとわかります.

$F = F_1$ とおいて, それぞれの場合について関係式を詳しく見てみると

1. $F_1(q, Q, t)$ について
$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P \qquad H' - H = \frac{\partial F_1}{\partial t}$$
2. $F_2(q, P, t) \equiv F_1 + PQ$ について
$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \qquad H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$
3. $F_3(p, Q, t) \equiv F_1 - pq$ について
$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = -q \qquad \frac{\partial F_3}{\partial Q} = -P \qquad H' - H = \frac{\partial F_3}{\partial t}$$
4. $F_4(p, P, t) \equiv F_1 - pq + PQ$ について
$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = -q \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \qquad H' - H = \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

なお母関数が与えられれば, (例えば F_1 が与えられた場合には) 次の手順を踏むことで新しい正準変数 P, Q を得ることができます.

1. $\dfrac{\partial F_1}{\partial q} = p$ を Q について解いて $Q = Q(p, q, t)$ を得る.
2. これを $\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = -P$ に代入することで $P = P(p, q, t)$ を得る.

5.5 正準変換の例

この節では実際に正準変換としてどのような変換, 及びに母関数が存在するのか紹介したいと思います.

(i) 恒等変換 $\cdots F_2(q, P) = qP$
$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = P = p \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = q = Q \qquad H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$
(ii) 点変換 $\cdots F_2(q, P) = f(q)P$
$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = f'(q)P = p \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = f(q) = Q \qquad H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$
もしくは $F_3(Q, p) = -g(Q)p$ としても
$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = -g(Q) = -q \qquad \frac{\partial F_3}{\partial Q} = -g'(Q)p = -P \qquad H' - H = \frac{\partial F_3}{\partial t} = 0$$
となり, (変換の向きの違いはありますが) 同様の変換が得られます.

(iii) 座標と運動量の交換 $\cdots F_1(q, Q) = qQ$
$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = Q = p \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = q = -P \qquad H' - H = \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$$

(iv) 力学系の運動

作用 S を $q_0=q(t_0)$, $q_1=q(t_1)$, $p_0=p(t_0)$, $p_1=p(t_1)$ の関数とみなせば

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\{p\dot{q}-H(p,q)\}\,\mathrm{d}t=\int_{q_0}^{q_1}p\mathrm{d}q-\int_{t_0}^{t_1}H(p,q)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}S=p_1\mathrm{d}q_1-p_0\mathrm{d}q_0-\{H(p_1,q_1)-H(p_0,q_0)\}\,\mathrm{d}t \tag{5.22}$$

ここで $(p,q)=(p_0,q_0)$, $(P,Q)=(p_1,q_1)$ と書くと

$$\mathrm{d}S=P\mathrm{d}Q-p\mathrm{d}q-\{H(P,Q)-H(p,q)\}\,\mathrm{d}t \tag{5.23}$$

(5.23) と (5.18) を比較することで

$$F_1=-S(q,Q)=-S(q_0,q_1) \tag{5.24}$$

が得られます. つまり, 時刻 t_0 から t_1 までの運動はそれ自体が正準変換となっていて母関数は作用 S そのものです.

5.6 ポアソン括弧式

[定義 5.6.1] ポアソン括弧式

正準変数 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ $(k=1,\dots,K)$ とそれを変数とする関数 $f(p,q)$, $g(p,q)$ に対して[*21]ポアソン括弧式 $\{f,g\}_{q,p}$ を次式で定義する.

$$\{f,g\}_{q,p}=\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right) \tag{5.25}$$

このポアソン括弧式を使うことで任意の関数 f の全微分は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) &(5.26)\\&=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}_{q,p} &(5.27)\end{aligned}$$

と表せます. (5.26) への変形には正準方程式 (5.12) を使いました. $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ が正準変数のとり方によらない量であることを考慮すれば, 任意の正準変換 $p,\ q\to P,\ Q$ に関して

$$\{f(p,q),H(p,q,t)\}_{q,p}=\{f(P,Q),H'(P,Q,t)\}_{Q,P} \tag{5.28}$$

が成立します. [*22]

また, 特に $f(p,q)$ が時間に陽に依存しないときには

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\{f,H\}_{q,p} \tag{5.29}$$

[*21] ただしここでは, f, g は陽に t に依存してもかまわないとしておきます.

[*22] ここでの $f(P,Q)$ とは $f(p(P,Q,t),q(P,Q,t))$ のことです.

となり, 次のことがわかります.

$$\{f, H\}_{q,p} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(p,q) \text{ が運動の積分}$$

まずは簡単な場合について考察します. $g(p,q) = p_k$ あるいは $g(p,q) = q_k$ の場合,

$$\{f, p_k\}_{q,p} = \sum_{n=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \delta_{kn} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_k}$$
$$\{f, q_k\}_{q,p} = \sum_{n=1}^{K} \left(-\frac{\partial f}{\partial q_n} \delta_{kn} \right) = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

さらにここで $n = 1, \ldots, K$ として $f(p,q) = p_n$ あるいは $f(p,q) = q_n$ とすると

$$\{p_n, p_k\}_{q,p} = \frac{\partial p_n}{\partial q_k} = 0 \qquad \{q_n, p_k\}_{q,p} = \frac{\partial q_n}{\partial q_k} = \delta_{kn}$$
$$\{p_n, q_k\}_{q,p} = -\frac{\partial p_n}{\partial p_k} = -\delta_{kn} \qquad \{q_n, q_k\}_{q,p} = \frac{\partial q_n}{\partial q_k} = 0$$

先ほど g がハミルトニアン H である場合のポアソン括弧式の正準変換に対する不変性を述べましたが, 正準変換の母関数が時間に陽に依存しないときにはさらに一般の g についても (5.28) が成立します.

$$\{f(p,q), g(p,q)\}_{q,p} = \{f(P,Q), g(P,Q)\}_{Q,P} \tag{5.30}$$

これは $g(p,q)$ をハミルトニアンとする仮想的な系を考えれば直感的には理解できます. [*23]したがって $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}$ のようにポアソン括弧式を添え字を書かずに書くことができます.

以下に以後の計算に必要と思われるポアソン括弧式の基本的な性質を挙げておきます. いずれも証明自体は容易ですので省略します.

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- $\{f, c\} = 0$　(ただし c は定数)
- $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
- $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + \{f_1, g\}f_2$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f, g\} = \{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, g\} + \{f, \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\}$

さてポアソン括弧式の性質を見ていくと次の恒等式が成り立つことがわかります.

[定理 5.6.1] ヤコビの恒等式

正準変数 p, q を変数に持つ任意の関数 f, g, h において

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{5.31}$$

が成立する.

[*23] 正確な証明は後で (やるかどうかも含めて) 考えます.

証明） 証明はひたすら計算を行うだけですが非常に煩雑です.

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial\{g,h\}}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial\{g,h\}}{\partial q_k} \right) \\
&= \sum_k \sum_n \left[\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial h}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial h}{\partial q_n} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial h}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial h}{\partial q_n} \right) \right] \\
&= \sum_k \sum_n \left[\frac{\partial f}{\partial q_k}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial q_n}\frac{\partial h}{\partial p_n} - \frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial p_n}\frac{\partial h}{\partial q_n} + \frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial q_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial q_n}\frac{\partial h}{\partial p_n} - \frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial p_n}\frac{\partial h}{\partial q_n} + \frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_n} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

(5.32) のすべての項はいずれかの関数の 2 階微分を含んでいます. ここでは h の 2 階微分を含む項に着目して, それらを抜き出したものを $\{f,\{g,h\}\}^h$ と書くことにします. (5.32) より

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\}^h = \sum_k \sum_n &\left[\frac{\partial f}{\partial q_k}\left(\frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial q_n} \right) \right. \\
&\left. - \frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_n} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.33}$$

同様に $\{g,\{h,f\}\}^h, \{h,\{f,g\}\}^h$ についても考えると[*24]

$$\begin{aligned}
\{g,\{h,f\}\}^h = \sum_k \sum_n &\left[\frac{\partial g}{\partial q_k}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial p_n}\frac{\partial f}{\partial q_n} \right) \right. \\
&\left. - \frac{\partial g}{\partial p_k}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial p_n}\frac{\partial f}{\partial q_n} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\{h,\{f,g\}\}^h = 0 \tag{5.35}$$

以上から添え字 n, k の入れ替えが可能であることも考慮しつつ計算すると

$$\{f,\{g,h\}\}^h + \{g,\{h,f\}\}^h + \{h,\{f,g\}\}^h = 0 \tag{5.36}$$

(5.36) と同様のことを f, g についてもやれば最終的に

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} &= \sum_{F=f,g,h} \left(\{f,\{g,h\}\}^F + \{g,\{h,f\}\}^F + \{h,\{f,g\}\}^F \right) \\
&= 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

次にポアソン括弧式と正準方程式の関係について述べておきます.

(5.27) において $f = p_k$, q_k の場合を考えると

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = \{p_k, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{5.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \{q_k, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{5.38}$$

が得られます. もちろんこれらは正準方程式と等価なものです.

[*24] cyclic に f, g, h を入れ替えれば計算する必要はなく (5.32) から求められます.

5.7 ハミルトン-ヤコビの方程式

正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ では新しいハミルトニアン H' が

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \qquad \dot{P} = \frac{\partial H'}{\partial Q}$$

を満たします. 仮に $H' = 0$ とすることができれば Q も P も保存量となり, 問題が解けたことになります. 母関数を $F_2(q,P,t)$ とすると

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, \qquad H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

これについて $H' = 0$ とすると

$$\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t} + H(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t) = 0 \tag{5.39}$$

これを満たす $F_2(q,P,t)$ を選ぶことができれば P は定数となります. そこで $P = \alpha$ と書くことにして, $F_2 = S$ とおけば (記号をおき直しただけです)

$$\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0 \tag{5.40}$$

となります.

(5.40) を**ハミルトン-ヤコビの方程式** (Hamilton-Jacobi equation) と呼びます. また, S をハミルトンの主関数 (Hamilton's principal function) と言います.

実際には q は K 個の変数 $q_1, q_2, \ldots, q_K$ となり, 計算の過程で $K+1$ 個の積分定数, すなわち $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ 及びに S の付加定数が生じます.

また, $H' = 0$ により, Q も保存量となるのでこれを β[*25]と書くと, $S(q,\alpha,t)$ が得られれば,

$$p_k = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_k}, \qquad \beta_k (= Q_k) = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_k} \tag{5.41}$$

を解くことで

$$\begin{cases} q = q(\alpha,\beta,t) \\ p = p(\alpha,\beta,t) \end{cases} \tag{5.42}$$

が得られます. $F_2 = S$ と書いた理由について説明します. S の時間微分を考えると

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ &= -H + \sum_{k=1}^{K} p_k \dot{q}_k = L \end{aligned} \tag{5.43}$$

したがって

$$S = \int L \mathrm{d}t \tag{5.44}$$

となり, S が作用と一致するからです.

[*25] 勿論 Q は $Q_1, \ldots, Q_K$, β は $\beta_1, \ldots, \beta_K$ の意味です.

特に H が時間に陽に依存しない場合には

$$S = -Et + S'(q)$$

とおくことで

$$H(q, \frac{\partial S'}{\partial q}) = E \tag{5.45}$$

が得られます. これもハミルトン-ヤコビの方程式と呼ばれます.

5.8 リウヴィルの定理 (Liouville's theorem)

正準変数が張る位相空間内の 1 点を表すベクトルを

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \\ a_{K+1} \\ \vdots \\ a_{2K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_K \\ p_1 \\ \vdots \\ p_K \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

と書きます. $\boldsymbol{a}$ が時間に陽に依存しない正準変換によって

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_K \\ A_{K+1} \\ \vdots \\ A_{2K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_K \\ P_1 \\ \vdots \\ P_K \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

にうつるとします. [*26] それぞれの正準方程式は次式で与える $2K \times 2K$ 正方行列 J

$$J = \begin{pmatrix} O & E_K \\ -E_K & O \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

を用いて[*27]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = J\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{a}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = J\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{A}} \end{cases} \tag{5.49}$$

と書けます. 個別の a_i, A_i について考えると

$$\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{2K} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial a_j}, \qquad \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{2K} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial A_j} \tag{5.50}$$

となります.

[*26] 授業では $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$ は横ベクトルで与えられていましたが, 後の式を行列表記でわかりやすく書くためここでは縦ベクトルで与えておきます.

[*27] E_K は $K \times K$ の単位行列です.

(5.49) の第二式に ($\boldsymbol{A}$ が t に陽に依存しないことを考慮して) 連鎖律を適用します. [*28]

$$J\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{A}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{D(\boldsymbol{A})}{D(\boldsymbol{a})}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{D(\boldsymbol{A})}{D(\boldsymbol{a})}J\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{a}}$$

これに $\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{a}} = {}^t\!\left(\dfrac{D(\boldsymbol{A})}{D(\boldsymbol{a})}\right)\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{A}}$ を代入して (これが正しいことは計算すればすぐにわかります)

$$= \frac{D(\boldsymbol{A})}{D(\boldsymbol{a})}J\,{}^t\!\left(\frac{D(\boldsymbol{A})}{D(\boldsymbol{a})}\right)\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{A}} \tag{5.51}$$

したがって $M = \dfrac{D(\boldsymbol{A})}{D(\boldsymbol{a})}$ と書けば

$$J = MJ^tM \tag{5.52}$$

が得られます. 両辺の行列式を取ることで

$$\det J = \det M \det J \det {}^tM = (\det M)^2 \det J$$
$$\therefore \det M = \pm 1 \tag{5.53}$$

これにより位相空間のある領域にわたる積分は[*29]

$$\int \mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2\cdots\mathrm{d}Q_K\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_K = \int \underbrace{|\det M|}_{=1}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\cdots\mathrm{d}q_K\mathrm{d}p_K\cdots\mathrm{d}p_K$$
$$= \int \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\cdots\mathrm{d}q_K\mathrm{d}p_K\cdots\mathrm{d}p_K \tag{5.54}$$

となり, これが正準変換によって不変であることがわかります. 系の時間発展も正準変換で記述できることは 5.5 節でやったので結局, 以下の定理が得られます.

[定理 5.8.1] リウヴィルの定理

位相空間内に考えた有限の領域内の各点が正準方程式に従って運動すると, 領域の形は変形するが体積は不変 (一定) に保たれる.

5.9 作用変数と断熱定理

周期的な運動に対して**作用変数** J を

$$J_i = \oint p_i \mathrm{d}q_i \tag{5.55}$$

で定義します。[*30] これは角運動量の次元をもっています。こうして定義した作用変数に関して以下の定理が成立します。

---

*28 ヤコビ行列 $\frac{D(\boldsymbol{A})}{D(\boldsymbol{a})}$ とは ij 成分が $\frac{\partial A_i}{\partial a_j}$ であるような行列のことです. 授業では各成分ごとに計算していましたが, ヤコビ行列を使ったほうが添え字がなくなって簡潔に書けると思います.

*29 1 行目の変形については微分積分学の教科書を見ればどれにでも書いてあると思いますので, ここでは既知の公式として与えます.

*30 $\oint$ とは 1 周期分の積分を行うという意味です。

[定理 5.9.1] 断熱定理

ハミルトニアンに含まれるパラメータをきわめてゆっくり変化させたとき、作用変数は不変に保たれる。

[問 5.1] 電磁場中の荷電粒子のラグランジアンは $L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - e\phi(\boldsymbol{r})$ で与えられる。

(i) この系のハミルトニアンを求めよ。

(ii) (i) で求めたハミルトニアンから運動方程式を求めよ。

[問 5.2] 1 次元調和振動子のハミルトニアン $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$ から運動方程式を導け。

[問 5.3] 3 次元デカルト座標において角運動量 $\boldsymbol{J} = {}^t(J_x, J_y, J_z) = {}^t(J_1, J_2, J_3)$ のポアソン括弧式 $\{J_i, J_j\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を求めよ。

[問 5.4] ハミルトニアンが $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ で与えられる 1 次元調和振動子に対して次の変換 $(p, q) \to (P, Q)$ は正準変換か?正準変換であれば、その母関数はどう書けるか?

(i) $p = P,\ q = Q + aP$ $(a:$ 定数$)$

(ii) $p = \sqrt{m\omega}P,\ q = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}Q$

[問 5.5] 1 次元調和振動子のハミルトニアン $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ を母関数 $F_1(q, Q) = \frac{1}{2}q^2 \cot Q$ を用いて正準変換することで溶け。

[問 5.6] 次のラグランジアンからラグランジュ方程式を求めよ。また、ハミルトニアンを求めて正準方程式を導き、両者が一致することを示せ。

(i) $L = e^{\sqrt{m}\dot{q}}$

(ii) $L = (\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2)e^{\lambda t}$

[問 5.7] (試験範囲外) 自由空間での質点の運動をハミルトン-ヤコビ方程式を用いて解け。ただし、ハミルトニアンは $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ で与えられる。