電磁気学 I

高橋　学

平成 22 年 2 月 22 日

目 次

第1章　相対論の背景

1.1　相対論の必要性

ここでは Newton 力学の限界とそれにともなう相対論の導入の必要性を言及する。導入の部分なのでほとんど難しい内容はない。また、試験で必要とされる部分はおそらく次のセクションからだと思われるので、読み飛ばしていただいてかまわない。

1.1.1　電子加速器

電子 (質量 m_e, 電荷 e) を電位差 V で加速する。
Newton 力学の場合
電子の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}\,m_e v^2 = eV \tag{1.1}$$

と書ける。すなわち、かける電圧 V を大きくすれば、速さ v はいくらでも大きくなるということを表している。しかし、実測値においては、

V	v^2(実測)
0.5MV	$6.8 \times 10^{16}(\mathrm{m/s})^2$
1.0MV	$7.5 \times 10^{16}(\mathrm{m/s})^2$
15MV	$9.0 \times 10^{16}(\mathrm{m/s})^2$

となる。このように v は光速 $c = 3.0 \times 10^8$ に近づく。

相対論の場合
Einstein によれば、粒子の持つエネルギーは $\beta = v/c, \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, m(v) = \gamma\, m_e$とおくと、

$$E = m(v)c^2$$

である。すなわち、加速すると、電子は重くなる。[1]
静止時のエネルギーは $E_0 = m_e c^2$, 加速後のエネルギーは $E = \gamma m_e c^2$ であるから、(1.1) 式に対応する式は

$$(\gamma - 1)\,m_e c^2 = eV \tag{1.2}$$

となる。

■ $\beta \ll 1\,(v \ll c)$ の場合
$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \dfrac{\beta^2}{2}$ という近似が成り立つから、

$$\frac{1}{2}\,\beta^2 m_e c^2 = \frac{1}{2}\,m_e v^2 = eV \quad \text{(Newton 力学と一致 !)}$$

[1]第 4 章で解説する。

■ 1 GeV= eV の場合

$m_e c^2 \sim 0.5$ MeV $\quad \rightarrow \quad \gamma m_e c^2 \sim 1\mathrm{GeV}$

$\gamma = \dfrac{eV}{m_e c^2} + 1 = 1950〜2000$

$\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} = \dfrac{v}{c} = 0.999999867$ 　(実験結果と一致！)

1.1.2　電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ の関係

静止系 $\mathcal{S}$ とそれに対して速度 $\vec{v}$ で動く運動系 $\mathcal{S}'$ という 2 つの座標系を考える。(以下の文章においても $\mathcal{S}$、$\mathcal{S}'$ が登場した際には同様の系であるとする。)
電子が $\mathcal{S}$ に対して速度 $\vec{v}$ で動いている、つまり $\mathcal{S}'$ 上で静止しているとする。
$\mathcal{S}$、$\mathcal{S}'$ で観測される電場、磁場をそれぞれ $\mathcal{S}(\vec{E}, \vec{B})$、$\mathcal{S}'(\vec{E}', \vec{B}')$ とすると、$\mathcal{S}'$ では電子は静止しているから、電場と磁場は観測者に依存することを考えると、

$$\vec{E}' \neq 0, \vec{B}' = 0$$

である。
Galilei 変換 (後述) はこれを満たさないので、これを満たすような新しい座標の変換式が必要。

1.1.3　Weber と Kohlrausch の実験 (1856)

フィゾーの実験 (1849)(歯車使うヤツ) によって光速は求められていたが、電磁波は知られていなかった。
2 人は静電単位、電磁波単位系から光速度を求めた。
静止している 2 つの荷電粒子 (電荷 q_1, q_2) が距離 r のところに置かれているとき、2 粒子間に働くクーロン力は

$$F_c = \frac{1}{\utilde{4\pi\varepsilon_0}} \times \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

である。また、距離 r だけ離れている 2 つの電流 I_1, I_2 の間に働く力は

$$F_i = -\frac{\mu_0}{\utilde{2\pi}} \frac{I_1 I_2}{r}$$

である。
2 力の波線を施した係数部分の比をとると

$$\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{\frac{\mu_0}{2\pi}} = \frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{2}c^2$$

こうして電磁場の実験で光速を求めた。電磁場は相対論的効果であるため、光速が求まったわけである。

1.2　Newton 力学と Galilei 変換

Newton は著作「プリンキピア」(1687) にて、運動の法則を発表した。
<u>Newton の法則</u>

- 第一法則：外力 = 0 $\quad\Rightarrow\quad$ 速度一定

- 第二法則：運動方程式　$F = ma$

- 第三法則：作用反作用の法則

第一法則は第二法則に包含されるものではなく、慣性系の定義と慣性系の存在を表したものである。
さて、第二法則により、慣性系では $F = ma$ が成立するわけであるから、慣性系が一つ存在すれば、それに対して等速度で運動する座標系も慣性系ということになる。同様の操作をくりかえして、無数の慣性系を取ることができる。この操作がすなわち Galilei 変換である。

さて、物理法則というのは自然現象の間に存在する時間と空間によらない普遍的な関係を表したものである。ゆえに、法則というのは関係式と座標の変換式のセットである。その代表的な例として、Newton の法則は運動方程式 $ma = F$ という関係式と、Galilei 変換という変換式のセットである。言い換えれば、Newton の運動方程式は Galilei 変換に対して不変である。

Galilei 変換

静止系 $\mathcal{S}(x, y, z)$ からそれに対して速さ V で $+x$ 方向に運動する運動系 $\mathcal{S}'(x', y', z')$ への座標変換は以下で与えられる。

$$x' = x - Vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

これら 4 つの関係式を用いると、

$$\text{速度：} v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V = v - V$$

$$\text{加速度：} a' = \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = a$$

であり、また

外力 $F' = F$

質量 $m' = m$

であるから、Newton の運動方程式は Galilei 変換に対して不変である。

1.3　ベクトル演算子

x, y, z 方向の単位ベクトルを $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ と書くことにすると、任意のスカラー関数 ϕ とベクトル関数 $\vec{A}$ について以下のような微分演算子が定義できる。

■ **ナブラ**

$$\vec{\nabla} = \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

■ **勾　配**　gradation

$$\vec{\nabla}\phi = \mathrm{grad}\,\phi = \vec{e_x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

■ **発　散**　divergence

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

■ **回　転**　rotation

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{e_x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{e_y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{e_z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

■ **ラプラシアン**　Laplacian

$$\Delta\phi=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

また、これらについては以下のような乗法計算が成り立つ。

- $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{A})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A})-\Delta\vec{A}$ (重要公式)
- $\mathrm{div}(\phi\vec{A})=\phi\mathrm{div}\vec{A}+\mathrm{grad}\phi\cdot\vec{A}$
- $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\vec{B}$
- $\mathrm{rot}(\phi\vec{A})=\phi\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\times\mathrm{grad}\phi$
- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})\equiv 0$, $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi)\equiv 0$

また、以下のような定理も存在する。(証明は各自ベクトル解析の本などで確認してほしい)

■ **Gaußの発散定理** [2]

任意の閉曲面 $\mathcal{S}$ とそれに覆われた 3 次元領域 $\mathcal{V}$ について次が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{V}}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV=\int_{\mathcal{S}}\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

■ **Stokes の定理**

任意の閉曲線 $\mathcal{C}$ とそれに囲まれた 2 次元領域 $\mathcal{S}$ について次が成り立つ。

$$\oint_{\mathcal{C}}\vec{A}\cdot d\vec{\ell}=\int_{\mathcal{S}}\mathrm{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

1.4　Maxwell の電磁方程式と Galilei 変換

真空中では電荷密度 $\rho=0$、電流密度 $\vec{j}=0$ であるから、電場 $\vec{E}$、磁場 $\vec{B}$ についての Maxwell 方程式は

$$\text{(M1)}\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

$$\text{(M2)}\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\text{(M3)}\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$$\text{(M4)}\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

である。前節の重要公式と式 (M1) から、

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$$

となるので、(M3) 式の rotation を取ると、

$$-\Delta\vec{E}=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

$$\therefore\quad\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}=0$$

[2]余談だが、一般的にはこの定理は Gaußの定理と呼ばれているが、実は Gaußよりも先に Ostrogradsky(オストログラドスキー) という人が論文で発表していた。と太田先生が著書でおっしゃっていました。

同様にして、(M4) 式の rotation を取れば、

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{B}=0$$

が得られる。これらは任意の方向に等速度 c で伝播する電磁波を表す波動方程式である。これらの一つの成分を ψ とし、x 方向に進む波を $\psi=\psi(x,t)$ とする。すなわち、一次元の波を考えることにすると、波動方程式は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi=0 \tag{1.3}$$

と書ける。この方程式の一般解は任意の関数 f,g を用いて、

$$\psi(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct) \tag{1.4}$$

である。

$\because$　　$\xi=x-ct,\eta=x+ct$ とおくと、微分演算子の対応は

- $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial\eta}=\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\dfrac{\partial}{\partial\eta}$
- $\dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t}=-c\dfrac{\partial}{\partial\xi}+c\dfrac{\partial}{\partial\eta}$

であるから、波動方程式は ξ,η に変換すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\right]\psi=4\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\psi=0$$

したがって、(1.3) の解は上記の (1.4) のように書ける。

さて、一般解 (1.4) に $x'=x-Vt,t'=t$ という Galilei 変換を施すと、

$$\psi(x',t')=f(x'-(c-V)t')+g(x'+(c+V)t') \tag{1.5}$$

となる。これは静止系 $\mathcal{S}$ に対して波の進行方向と同方向に速さ V で動く座標系 $\mathcal{S}'$ からみると、f は速さ $c-V$ で $+x$ 方向に、g は速さ $c+V$ で $-x$ 方向に進行する波を表している。すなわち、電磁波が Galilei 変換に対して不変であるとすれば、電磁波は媒質を持つ波 (水面波や音波) と同じということになる。そこで、音波にとっての空気に該当するような、電磁波の媒質 (エーテル) が存在するのではないか、という仮説がたてられた。

結論を先に言ってしまえば、この波動方程式は Galilei 変換に対して不変ではなく、エーテルは存在しない。

■　講義ではこのあと、1.5 エーテルをめぐる実験と題してエーテルの存在について議論していたが、この講義ノートでは省略する。(テストには多分出ないと思う。) 興味がある方は講義で紹介されていた「歴史を変えた物理実験」(丸善) をお読みいただきたい。

第2章　特殊相対性理論

2.1　特殊相対論の原理

特殊相対性理論を創始したのは、やはり Einstein である。Einstein は 1905 年に発表した論文「動いている物体の電気力学」(原題 ”zur Elektrodynamik bewegter Körper”) で以下を公理とした。

公理 1 ：すべての慣性系はすべての物理法則に対して等価である。(**(Galilei の) 相対性原理**)

公理 2 ：光速度は座標系 (観測者) によらず一定である。(**光速度一定の法則**)

※ ただし、この他に時間の一様性、空間の一様性と等方性が仮定されている。

2.2　Lorentz 変換

前のセクションでは Maxwell の電磁方程式が Galilei 変換に対して不変でないということを説明した。歴史的には Maxwell の電磁方程式が登場したのはおよそ 1865 年のことで、Newton の法則 (運動方程式＋ Galilei 変換) と矛盾していたため、登場してから Einstein によって特殊相対論が創始されるまでは Maxwell 方程式の方が間違っているとされていた。すなわち電磁気学には、Maxwell 方程式とは別の、Galilei 変換に従うような関係式が存在するはずだ、と考えられていたわけである。そこで考え出されたのが、Maxwell 方程式が不変となるような Lorentz 変換であり、これによって Maxwell 方程式の方が Newton の法則よりも優れているということがわかった。

Lorentz 変換

静止系 $\mathcal{S}(t,x,y,z)$ とそれに対して $+x$ 方向に速度 V で等速度運動する運動系 $\mathcal{S}'(t',x',y',z')$ を考える。$t=t'=0$ で 2 つの系の原点が一致したと仮定する。

$\mathcal{S}(t,x)\to\mathcal{S}'(t',x')$ という変換は

$$x' = A(x-Vt) \tag{2.1}$$

$$t' = Bt + D\frac{x}{c} \tag{2.2}$$

$$y'=y,\ z'=z \tag{2.3}$$

と書けると仮定すると、微分演算子の対応は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = A\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{D}{c}\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -AV\frac{\partial}{\partial x'} + B\frac{\partial}{\partial t'}$$

であるから、Lorentz 変換に対して Maxwell 方程式が不変であるという Lorentz 変換の性質 (以下では○○は Lorentz 不変という表現を用いる) を使うと、Maxwell 方程式から導出された波動方程式も Lorentz 不変なので、Lorentz 変換後も同形でなければならないから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\left(-AV\frac{\partial}{\partial x'} + B\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - \left(A\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{D}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 \\ &= \frac{B^2-D^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + A^2\left(\frac{V^2}{c^2}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2A}{c}\left(\frac{BV}{c}+D\right)\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}\end{aligned}$$

上の式の第 1 辺と第 3 辺の係数を比較して、

$$B^2 - D^2 = 1,\ A^2\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right) = -1,\ A\left(\frac{BV}{c} + D\right) = 0$$

であるから、これらを解くと、$\beta = \dfrac{V}{c}, \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とおけば、

$$A = B = \pm\gamma,\ D = \mp\beta\gamma \qquad \text{(複号同順)}$$

である。$\beta \to 0$ で Galilei 変換に一致するはずなので、

$$A = B = \gamma,\ D = -\beta\gamma$$

これを (2.1),(2.2) 式に代入して以下の Lorentz 変換式を得る。

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - Vt)$$

$$y' = y,\ z' = z$$

逆に $\mathcal{S}$ 系は $\mathcal{S}'$ 系に対して $-V$ で運動しているので、同様の Lorentz 変換式が成立する。

$$ct = \gamma(ct + \beta x)$$

$$x = \gamma(x + Vt)$$

$$y = y',\ z = z'$$

これらを行列表示すると奇麗に表せて、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

■ 授業では Maxwell 方程式から導出される波動方程式が Lorentz 不変という性質を用いて Lorentz 変換式を出したが、セクションのはじめに紹介した Einstein の論文では別の導出の仕方をしている。その導出方法については「相対性理論」(岩波文庫) を参照するか、もしくはググれば英語版が PDF で入手可能なのでそちらの方を参照していただきたい。本来、Lorentz 変換は同時刻の概念と空間の対称性から求められる。

2.3　同時刻の概念

講義では静止系 $\mathcal{S}$ と運動系 $\mathcal{S}'$ ではお互いを観測したとき、他方の同時線 (その上の事象 (event)[1] がすべて同時刻になるような線) が自分の同時線とは異なることを話していた。このノートでは補足として Einstein がさきほどあげた論文の中で定義した同時性について書いておこう。

同時性

単一の座標系から観測する。

時刻 t_A に事象 A を出発した光が時刻 t_B に事象 B に到達し、全く同時 (時刻 t_B) に事象 A へ向かって光が反射され、時刻 $t_{A'}$ に事象 A に立ち戻るとき、

[1]時空の 1 つの点で指定される物理的なできごとのことを事象という。

事象 A と事象 B が同時刻

$$\Longleftrightarrow \quad t_B - t_A = t_{A'} - t_B \tag{2.6}$$

さて、これは何を意味しているのか。試しに静止系 $\mathcal{S}$ に対してその $+x$ 軸方向に速度 V で運動する運動系 $\mathcal{S}'$ 上にう〇い棒が静止している場合を考えてみる。このうま〇棒の左端を A($x' = 0$)、右端を B($x' = l$) とする。運動系 $\mathcal{S}'$ から観測すれば、〇まい棒は静止しているので、A と B は同時刻である。これに対して静止系 $\mathcal{S}$ から観測すると、(2.6) 式の左辺と右辺はう〇い棒の長さ l、光速 c を用いて、

$$t_B - t_A = \frac{l}{c-V}, \qquad t_{A'} - t_B = \frac{l}{c+V} \qquad \therefore \quad t_B - t_A \neq t_{A'} - t_B$$

となる。すなわち、観測者に対して運動している 2 つの事象では同時性が破れている。Newton 力学にとっては同時性が当然のものであったが、相対論では同時性はほとんど意味がなく、それと引き換えに光速度不変を得たのである。

2.4　ミンコフスキー時空

相対論は同時性を代償に光速度不変を得たわけであるが、同時性が失われた以上、事象は (x, y, z) のような空間座標を考えるだけではなく、時間座標 t も考慮に入れた 4 次元時空 (ct, x, y, z)[2]を考えるべきである。この 4 次元時空のことをミンコフスキー時空という。

静止系 $\mathcal{S}(ct, x, y, z)$ で原点から時刻 $t = 0$ に光 (球面波) が出たとする。その波面は

$$\begin{aligned} & (ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

という方程式で表わされる。これは 4 次元超空間で考えるとイメージしにくいが、試しに $x = 0$ としてみると、(ct, y, z) 空間においてその世界線 (worldline)[3] は円錐を描く。そこで、(2.7) 式で表わされる図形を**光円錐(light cone)** と呼ぶ。

また、運動系 $\mathcal{S}'(ct', x', y', z')$ でみると、Lorentz 変換式 (2.4) を用いて、

$$\begin{aligned} -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 &= -\gamma^2(ct - \beta x)^2 + \gamma^2(x - \beta ct) + y^2 + z^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(-(ct)^2 + x^2) + y^2 + z^2 \\ &= -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、$S \equiv -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ は Lorentz 不変量である。

2 つの事象 $P_1(ct_1, x_1, y_1, z_1), P_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ について、その関係をあらわす量 (**時空間隔**もしくは**世界間隔**)

$$(\Delta S)^2 \equiv -c^2(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

を定義する。これは Lorentz 不変量であるというのは問題ないだろう。$(\Delta S)^2$ の正負によって時空を分類することができる。

- $(\Delta S)^2 < 0$　$\cdots$　時間的 (time-like)

  P_1 を原点として光円錐を考えると、P_2 はその光円錐の中に含まれている。このとき、P_1 と P_2 は因果関係を持っている。$t_1 < t_2$ のときは P_2 は P_1 の絶対的未来、$t_1 > t_2$ のときは P_2 は P_1 の絶対的過去であるという。

[2]次元を合わせるために t に c をかけた。
[3]質点の運動や光の伝搬を表す時空の線を世界線という。

- $(\Delta S)^2 = 0$　$\cdots$　光的 (light-like)

  これはまさしく光のことである。

- $(\Delta S)^2 > 0$　$\cdots$　空間的 (space-like)

  非因果的ともいわれる。すなわち、P_1 と P_2 の因果関係はない。P_1 と P_2 は相互に影響を及ぼすことができず、互いは自分と同時であり、以前であり、以後である。この場合に該当するのは物体の速度 $v > c$ で、これは非因果的である。

2.5　共変性

特殊相対論は、「全ての物理法則は Lorentz 不変である」と主張している。物理法則を Lorentz 変換に伴う 4 元テンソル形式の方程式 (共変方式の方程式) で矛盾なく表すことが目標である。[4]

[4] と講義では言っていたが、これでは共変性の説明にはなっていない。**共変的である**とは、例えば、座標を Lorentz 変換したときに運動量も一緒に Lorentz 変換される場合、運動量は共変的であるという。つまり、何かと一緒に変化する性質が共変性である。名前のまんまですね。

第3章　相対論的な時空間

この章では Lorentz 変換によって理論的に考えられる「時間の遅れ」、「Lorentz 収縮」、「速度合成式」、「光のドップラー効果」について述べる。

ここで今一度 Lorentz 変換式をおさらいしておこう。静止系 $\mathcal{S}(ct,x,y,z)$ に対して $+x$ 方向に速度 V で運動する運動系 $\mathcal{S}'(ct',x',y',z')$ を考え、$t=t'=0$ で 2 つの系の原点が一致したと仮定すると、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

これが Lorentz 変換式であった。

3.1　時間の遅れ

$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ 系の原点が一致する瞬間を $t=t'=0$ として、それぞれの系の原点に固定した 2 つの時計 C, C' の時刻を合わせる。その後、$\mathcal{S}$ から観測した時計 C' の時刻を考える。
C' は $\mathcal{S}$ 系から見ると、$x=Vt$ の位置にある。これを $ct'=\gamma(ct-\beta x)$ に代入すると、

$$ct' = \gamma(ct-\beta Vt) = \gamma ct(1-\beta^2) = \sqrt{1-\beta^2}\,ct$$

$$\therefore\quad t' = \sqrt{1-\beta^2}\,t < t \tag{3.1}$$

したがって、運動している時計 C' は静止している時計 C に比べて $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍ゆっくり進む。なお、時計の示している時刻は2つとも静止系にいる人が観測している。観測者が身につけている腕時計と、目の前を走っている時計を見比べると、観測者にとっては後者の方が遅れて見えるということである。
空間の対称性から、逆に $\mathcal{S}'$ から $\mathcal{S}$ の時計 C と C' を見比べてみれば、速度 V を $-V$ に置き換えればいいので、同様に $\mathcal{S}'$ 上の観測者からすれば、自分から速度 $-V$ で遠ざかっていく $\mathcal{S}$ 上の時計 C は自分の時計 C' より $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍ゆっくり進んでいるように見える。[1]

さて、$\mathcal{S}$ 系中で加速度運動をしている時計の場合はどうだろうか？その時計の速度を $v(t)$ とする。微小な時間間隔では上記と同様の議論ができるので、$\mathcal{S}$ 系で時刻が $t\to t+dt$ と変化したとき、時計の示す時間 (固有時間) が $\tau\to\tau+d\tau$ と変化したとすると、

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,dt \qquad \text{ただし、}\beta = v(t)/c$$

が成り立つ。ゆえに事象 P から事象 Q へ時計が運動したとき、固有時間の変化は

$$\Delta\tau = \int_P^Q \sqrt{1-\beta^2}\,dt = \int_P^Q \sqrt{1-(v(t)/c)^2}\,dt$$

である。

[1]つまり、別の慣性系にいる 2 人の観測者は相手の腕時計を見て「残念だけどお前の時計遅れてるわwwwざまぁwww」と思っている。とりあえず走りながら時計見せ合うとか危ないからやめようね。

3.2　Lorentz 収縮

再びうま〇棒に登場していただく。静止系 $\mathcal{S}$ 上に長さ l_0 のうま〇棒が x 軸と平行に静止しているとする。うま〇棒の左端を $\mathrm{A}(ct, x_A, y, z)$、右端を $\mathrm{B}(ct, x_B, y, z)$ とおくことにすると、運動系 $\mathcal{S}'$ から見て、

$$x_A = \gamma(x'_A - V\underset{\sim}{t'})$$

$$x_B = \gamma(x'_B - V\underset{\sim}{t'})$$

であるから、($\underset{\sim}{t'}$ は $\mathcal{S}'$ で座標を測定することを表している。)

$$l_0 = x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A) \equiv \gamma l$$

すなわち、$\mathcal{S}'$ でのう〇い棒の長さ l は

$$l = l_0/\gamma = \sqrt{1-\beta^2}l_0 \ < l_0 \tag{3.2}$$

となり、静止系で観測したときより短くなっている。すなわち、運動しているうま〇棒は縮んでいるように見えるのである。[2]これを **Lorentz 収縮**と呼ぶ。

3.3　速度の合成式

$\mathcal{S}$ 系から見ると速度 $\vec{v}$ で、$\mathcal{S}'$ 系で見ると速度 $\vec{v'}$ 運動している物体を考える。$\mathcal{S}'$ 系の $\mathcal{S}$ 系に対する速度は $\vec{V}(=(V,0,0))$ であるから、Galilei 変換を考えると、

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V}$$

であるが、これでは $\vec{v'} = c$ としたときに $\vec{v}$ が光速度を超える場合がある。
これに対して Lorentz 変換を考えると、微分の対応式は

$$dt = \gamma(dt' + (V/c^2)dx')$$

$$dx = \gamma(dx' + Vdt')$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

であるから、$\mathcal{S}$ で見た速度は $\mathcal{S}'$ での速度を用いて成分ごとに計算すると、

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{dt'}{dx'}\frac{dx'}{dt} = \gamma(v'_x + V)\cdot\frac{1}{v'_x}\cdot\gamma(v_x - V)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\gamma^2(1+\frac{V}{v'_x}) - 1\right]v_x = \gamma^2\left(1+\frac{V}{v_x}\right)V$$

$\gamma^2 - 1 = \beta^2\gamma^2$ であるから、

$$v_x = \frac{1+\frac{V}{v'_x}}{\beta^2 + \frac{V}{v'_x}}V = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \tag{3.3}$$

[2]これはリ〇マンショックに始まる現代の不況の煽りでも　や〇きんのいわゆる「大人の事情」でもない。相対論の効果の 1 つである。しかしながら、これからは私はうま〇棒は準静的に (=ゆっくり) 口に運びたいと思う。気持ちの問題ね。何はともあれ、やお〇んさんには頑張っていただきたいと思う今日この頃である。でないと私は死ぬ。

また、v_y, v_z についても、

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma\left(\frac{dt'}{dy} + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dy}\right)} = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)} \tag{3.4}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)} \tag{3.5}$$

以上が速度の合成式である。
粒子が x 軸に平行に動く時、$v_x = v,\ v_y = v_z = 0$ であるから、$v'_y = v'_z = 0,\ v'_x = v'$ であり、速度の合成式は単に

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \tag{3.6}$$

と書ける。$v' \to c, V \to c \Rightarrow v \to c$ であるから、いかなる速度の合成をしても光速を超えることはない。つまり、**光速度は速度の上限である。** これによって 1.1.1 電子加速器において示した実験結果を説明することができる。

3.4　光のドップラー効果

光源が (観測者に対して) 運動しているかどうかによって、光の速度は変わらないが、振動数 (周波数) は変化する。たとえば、光源が可視単色光を放っている場合、光源が近づいてくるときは周波数が増し、光の色が紫の側に寄り、逆に遠ざかるときは周波数が減り、光の色が赤の側に寄るといった現象が起こる。これを**ドップラー効果**という。音波の時と同様、その事実は非相対論的な運動学でも理解できるが、周波数の変化量は相対論を用いてはじめてちゃんと計算できる。

$\mathcal{S}$ 系において進行している光を $\mathrm{A}\cos\phi(t, \vec{r})$ とする。ただし、波数ベクトル $\vec{k}$、角振動数 $\omega(= ck)$ を用いてこれは

$$\begin{aligned} A\cos\phi(t,\vec{r}) &= A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ &= A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \end{aligned}$$

と書ける。なお、$\vec{k}$ の向きは光の進行方向と一致している。
光は Lorentz 不変であるから、

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \omega' t' - \vec{k'}\cdot\vec{r'}$$

が成り立つ。この左辺に Lorentz 変換を施すと、

$$\begin{aligned} \omega t - k_x x - k_y y - k_z z &= \gamma\left[\omega\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) - k_x(x' + Vt')\right] - k_y y' - k_z z' \\ &= \gamma(\omega - k_x V)t' - \gamma\left(k_x - \omega\frac{V}{c^2}\right)x' - k_y y' - k_z z' \\ \therefore\quad \omega t - k_x x - k_y y - k_z z &= \gamma(\omega - k_x V)t' - \gamma\left(k_x - \omega\frac{V}{c^2}\right)x' - k_y y' - k_z z' \end{aligned}$$

両辺の係数を比較すると、

$$\omega' = \gamma(\omega - k_x V) \qquad k'_x = \gamma\left(k_x - \omega\frac{V}{c^2}\right) \qquad k'_y = k_y \qquad k'_z = k_z$$

大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を用いて $\vec{k} = (\omega/c)\vec{n}$ とすれば、

$$\omega' = \gamma(\omega - \vec{k}\cdot\vec{V}) = \gamma\omega\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)$$

■　$\vec{n} /\!/ \vec{V}$ の場合 (波の進行方向と観測者の進行方向が一致している場合)

$$\omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega$$

これを**縦ドップラー**という。$\beta > 0$ なら光源が遠ざかっていき、周波数が下がる。$\beta < 0$ なら光源は近づいてきて、周波数があがる。

■　$\vec{n} \perp \vec{V}$ の場合 (波の進行方向と観測者の進行方向が直交している場合)
$\vec{V} = (V, 0, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, \omega/c)$ とすると、

$$\omega' = \gamma\omega$$

となる。こちらは**横ドップラー**という。

第4章　相対論的力学

4.1　相対論的質量

Newton 力学において、質量はいかなる座標系から見ても変わらないとされている。これに対して相対論においては、質量は第 3 章 で見たような長さや時間と同様に相対的なもので、座標系によってその値は異なる。その値を求めるためにともに静止質量[1]が $m(0)$ の 2 つの粒子の完全非弾性衝突を考えてみる。

静止系 $\mathcal{S}$ で見ると、左の粒子が右の粒子に対して速さ U で近づいていき、完全非弾性衝突をして 2 粒子は一体となり、質量 $M(u)$ の粒子となり、速さ u で進んでいる。
これに対して、速度 u で動く重心系 $\mathcal{S}'$ を考える。こちらから粒子を観測すると、左の粒子が右向きに、右の粒子が左向きに速度 u で近づき、衝突後静止する。
3.3 で示した速度の合成式を考えると、

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}} \\
\Leftrightarrow \quad u^2 + c^2 &= \frac{2uc^2}{U} \\
\Leftrightarrow \quad u^2 - \frac{2c^2}{U}u + c^2 &= 0 \\
\therefore \quad u &= \frac{c^2}{U} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{U}\right)^2 - c^2} \\
&= \frac{c^2}{U}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}\right]
\end{aligned}
$$

$U \ll c$ のとき、重心速度 $u \to U/2$ であるから、負の方を取って、

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{U} &= \frac{c^2}{U^2}\left[1 - \sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}\right] = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} \\
\therefore \quad \frac{U}{u} &= 1 + \sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}
\end{aligned}
$$

である。他方、$\mathcal{S}$ 系での運動量と質量 (＝エネルギー) が保存するので、

運動量:　$m(U)\,U = M(u)u$

質　量:　$m(U) + m(0) = M(u)$

$$
\begin{aligned}
&\therefore \quad m(U)\,U = (m(U)+m(0))u \\
&\longrightarrow \quad \frac{m(U)}{m(0)} = \frac{u}{U-u} = \frac{1}{\frac{U}{u}-1} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} = \gamma_U
\end{aligned}
$$

---

[1]観測者に対して物体が静止している場合の質量を**静止質量**という。

となる。すなわち、観測者に対して速度 v で運動している質点の質量 $m(v)$ は静止質量を $m(0)$ とし、$\beta = v/c$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とすると、

$$m(v) = \gamma m(0) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{4.1}$$

となる。

4.2　相対論的運動量、エネルギー

相対論的な運動量とエネルギーを以下のように定義する。[2]

■　**運動量**

$$\vec{p} = m(v)\vec{v} = \gamma m(0)\vec{v} \tag{4.2}$$

■　**エネルギー**

$$E = m(v)c^2 = \gamma m(0)c^2 \tag{4.3}$$

ここで γ の Taylor 展開を考えると、

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{1-\beta^2} = 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-\beta^2)^2 + \cdots\cdots \\ &= 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots\cdots\end{aligned}$$

であるから、これを用いてエネルギーを表しなおすと、

$$E = \underbrace{m(0)c^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}m(0)v^2}_{\text{古典力学での運動エネルギー}} + \frac{3}{8}m(0)\frac{v^4}{c^2} + \cdots\cdots \tag{4.4}$$

となる。
運動エネルギー $T(v)$ を

$$T(v) \equiv E(v) - m(0)c^2 = m(0)c^2(\gamma - 1) \tag{4.5}$$

と定義すると、$v \ll c$(古典極限) では確かに Newton 力学での運動エネルギーと一致している。

■ 質量 $m(v)$, 運動量 $\vec{p}$, エネルギー $E(v)$ は座標系に依存する (観測者によって異なる)。同一の座標系で見れば保存する。

4.3　4 元ベクトル

Lorentz 変換に従うベクトルのことである。すなわち、$\mathcal{S}$ 系から $\mathcal{S}'$ 系への変換を考えたとき、

$$A^\mu = B^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad \leftarrow \text{各成分が一致}$$

ならば、

$$A'^\mu = B'^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad \leftarrow \text{Lorentz 変換しても各成分が一致}$$

であるようなベクトルである。相対論で登場する 4 元ベクトルは以下のものである。このノートでは 3 元ベクトルを $\vec{x}, \vec{p}$ のように書き、4 元ベクトルを x^μ, p^μ のように書くことにする。

[2] 観測者によって物体の質量が異なる以上、Newton 力学で使われていた運動量保存則やエネルギー保存則はもはや使えない。そこで、相対論において保存するような運動量とエネルギーを新たに定義するのである。

■ 4 **元座標**

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{4.6}$$

4 元座標のスカラー

$$S^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{4.7}$$

x^μ は普通のベクトルで、x_μ は共変ベクトルと呼ばれる。

■ 4 **元速度**

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(c, \underbrace{v_x, v_y, v_z}_{\vec{v}}) = \gamma(c, \vec{v}) \tag{4.8}$$

4 元速度のスカラー

$$\gamma^2(-c^2 + v^2) = -c^2 \ (\text{一定}) \tag{4.9}$$

■ 4 **元運動量**

$$p^\mu \equiv m_0 u^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) = \left(\underbrace{\frac{E}{c}}_{(※)}, \vec{p}\right) \tag{4.10}$$

(※) エネルギーは運動量の第 0 成分である。このベクトルは**エネルギー-運動量ベクトル**とも呼ばれている。

4 元運動量のスカラー

$$-\left(\frac{E}{c}\right)^2 + p^2 = -m_0^2 c^2 \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow E^2 = (cp)^2 + (m_0 c^2)^2 = (cp)^2 + E_0^2 \quad (\text{静止エネルギー})$$

$$E^2 - (cp)^2 = E'^2 - (cp')^2 = E_0^2 \quad (\text{一定}) \tag{4.12}$$

なお、$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}, E = \gamma m_0 c^2$ から求めることもできる。

$$E^2 - (cp)^2 = \gamma^2 m_0^2 (c^4 - c^2 v^2) = \gamma m_0^2 c^4 (1 - \beta^2) = m_0^2 c^4$$

4.4　光子 (フォトン)

ここから 3 セクションで相対論を用いて粒子の運動を考える。
ここでは相対論で頻繁に登場する、基本的な粒子として光子 (フォトン) を説明する。まず、4.2 で述べた相対論的運動量とエネルギーの式から光子の運動量とエネルギーを考える。その関係式は

$$E^2 = (cp)^2 + (m_0 c^2)^2$$

である。ここで、光子の質量 $m_0 = 0$ であるから、

$$E = cp, \quad p = \frac{E}{c}$$

したがって光子は運動量を持っている。
次に光子の重要な 2 つの現象を考えておこう。

■ <u>光子の吸収</u>
エネルギー Q の光子が静止している質量 M_0 の粒子に衝突して、一体となって速度 v で動きだす場合、

$$\text{エネルギー保存則}: M_0c^2 + Q = M'c^2 \tag{1}$$

$$\text{運動量保存則}: \frac{Q}{c} = M'v \tag{2}$$

(1) 式より

$$M' = M_0 + \frac{Q}{c^2} \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{Q}{M_0c^2 + Q}$$

■ <u>光子の放射</u>
今度は逆に静止している質量 M_0 の粒子がエネルギー Q の光子を放出して[3]速度 v で動き出す場合、

$$\text{エネルギー保存則}: M_0c^2 = M'c^2 + Q \equiv E' + Q$$

$$\text{運動量保存則}: 0 = M'v' - \frac{Q}{c} \equiv p' - \frac{Q}{c}$$

$E' = M_0c^2 - Q,\ \ cp' = Q$ であるから

$$\beta' = \frac{v'}{c} = \frac{p'}{cM'} = \frac{cp'}{E'} = \frac{Q}{M_0c^2 - Q}$$

4.5　粒子の生成、崩壊

■ <u>粒子の生成</u>
2 つの陽子 $p_1,\ p_2$ の衝突によって起こる反陽子 $\bar{p}$ の生成を考える。つまり、

$$p_1 + p_2 \to p_1 + p_2 + \bar{p} + p_3$$

のような反応を考える。このうち最も効率のよい反応は反応後に重心系で 4 つの粒子 (陽子 3 つと反陽子 1 つ) が静止しているような反応である。これを考える。
重心系で見て、反応前の p_1, p_2 の質量を両方 m_0、運動量をそれぞれ $p, -p$ とする。エネルギーは重心系で保存するので、

$$E = 2\gamma m_0c^2 = 4m_0c^2$$

$$\therefore \quad \gamma = 2 \quad \Rightarrow \quad (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \frac{3}{4}$$

となる。これをもとに実験室系 (陽子 p_2 が静止している座標系) を考える。p_1 をみると、重心系が βc で動き、かつ重心系での p_1 の速度も βc であるから速度を合成すると、

$$\beta_1 = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

$$\frac{1}{\gamma_1^2} = 1 - {\beta_1}^2 = \frac{(1-\beta^2)^2}{(1+\beta^2)^2}$$

$$\therefore \quad \gamma_1 = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = 7$$

したがって、p_1 は $7m_0c^2$ の全エネルギー、すなわち $6m_0c^2$ の運動エネルギーを持たなければならない。
$m_0c^2 = 0.938$ GeV であるから、最低[4]5.6 GeV 程度の加速器が必要である。

[3] これを反跳 (recoil) という。
[4] 最初に書いた通り、これは最も効率のいい生成反応を考えている。

■ 粒子の崩壊

静止している質量 M_0 の粒子が崩壊して質量が m_1, m_2 の粒子になるとする。2 粒子の運動量をそれぞれ $\vec{p_1}, \vec{p_2}$、エネルギーを E_1, E_2 とすると、

$$\text{エネルギー保存則：} M_0c^2 = E_1 + E_2$$
$$\text{運動量保存則：} 0 = \vec{p_1} + \vec{p_2} \quad \Rightarrow \quad {p_1}^2 = {p_2}^2$$

エネルギーと運動量の関係式 $E^2 = (cp)^2 + (m_0c^2)^2$ より、

$$\begin{aligned} & E_1^2 - (m_1c^2) = (cp_1)^2 = (cp_2)^2 = E_2^2 - (m_2c^2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & E_1^2 - E_2^2 = (m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M_0} c^2 \end{aligned}$$

したがって、崩壊後の 2 粒子のエネルギーは

$$E_1 = \frac{M_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M_0} c^2, \quad E_2 = \frac{M_0^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M_0} c^2$$

となる。

4.6　散乱問題

このセクションで粒子の話は終わりである。

2 つの同種粒子の衝突を考える。
静止しているエネルギー E_0 の粒子 A に対して、運動量 p_1、エネルギー $E_1 = E_0 + K_1 (K_1 : \text{運動エネルギー})$ の粒子 B が衝突して、両方の粒子が共に粒子 B のもともとの進行方向に対して、角度 $\theta/2$ をなす方向に、運動量 p_2 で散乱したとする。
エネルギーと運動量に関しては以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E_1 + E_0 &= 2E_2 \\ p_1 &= 2p_2 \cos\frac{\theta}{2} \\ (cp_1)^2 &= E_1^2 - E_0^2 = (E_0 + K_1)^2 - E_0^2 = K_1(2E_0 + K_1) \\ (cp_2)^2 &= E_2^2 - E_0^2 = (E_0 + \frac{K_1}{2})^2 - E_0^2 = K_1\left(E_0 + \frac{K_1}{4}\right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{p_1^2}{4p_2^2} = \frac{2E_0 + K_1}{4E_0 + K_1} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1 + \cos\theta}{2} &= \frac{2E_0 + K_1}{4E_0 + K_1} \\ \therefore \cos\theta &= \frac{K_1}{4E_0 + K_1} \end{aligned}$$

結果を考えると、$K_1 \ll E_0$ ならば $\cos\theta \to 0$ なので $\theta \to \pi/2$ であり、$K_1 \gg E_0$ ならば $\cos\theta \to 1$ なので $\theta \to 0$ である。

もうひとつ有名な例としてコンプトン散乱を相対論的に考える。
静止している質量 m_0 の電子に対して、エネルギー Q_0, 運動量 $\frac{Q_0}{c}\vec{n_0}$ の光子が衝突し、光子はもともとの進行方向に対して角度 θ をなす方向にエネルギー Q, 運動量 $\frac{Q}{c}\vec{n}$ で、電子は光子とは反対の方向に角度 ϕ をなし、エネルギー E、運動量 $\vec{p}$ で散乱するとする。
運動量とエネルギーの関係は

$$\begin{aligned} Q_0 + m_0c^2 = E + Q \quad &\Leftrightarrow \quad Q_0 + m_0c^2 - Q = E \\ \frac{Q_0}{c}\vec{n_0} = \frac{Q}{c}\vec{n} + \vec{p} \quad &\Leftrightarrow \quad Q_0\vec{n_0} - Q\vec{n} = c\vec{p} \end{aligned}$$

ともに両辺を 2 乗して、

$$\begin{aligned} (Q_0 - Q)^2 + 2(Q_0 - Q)m_0c^2 + (m_0c^2)^2 = E^2 \\ Q_0^2 - 2Q_0Q\cos\theta + Q^2 = cp^2 \end{aligned}$$

エネルギーと運動量の関係式 $E^2 - (m_0c^2)^2 = (cp)^2$ より、

$$\begin{aligned} 2Q_0Q(1-\cos\theta) - 2(Q_0 - Q)m_0c^2 = 0 \\ \therefore \quad \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

量子論においては粒子のエネルギーは $Q = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$　(h :planc const= 6.6×10^{-34} J·s) であるから、コンプトン波長 $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.4\times 10^{-12}$ m を用いて、

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1-\cos\theta)$$

したがって、散乱角が大きいと波長が長くなり、エネルギーが下がる。

4.7　相対論的運動方程式

■ 相対論的運動方程式

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0\vec{v}) \tag{4.13}$$

これを 4 元ベクトルで書くと、

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad \left(\mu = 0,1,2,3、\tau : \text{固有時間}、d\tau = \frac{dt}{\gamma}\right) \tag{4.14}$$

$f^\mu \equiv (f^0, \vec{f})$, $p^\mu \equiv (E/c, \vec{p})$ とすると、

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right) = \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt},\gamma\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt},\gamma\vec{F}\right)$$

$\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ より

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{\gamma}{c}(\vec{F}\cdot\vec{v},\gamma) \equiv K^\mu \tag{4.15}$$

この K^μ はミンコフスキーの 4 元力と呼ばれ、上の方程式は Lorentz 不変である。

ここで (4.13) 式を考えると、

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = \underbrace{m_0 \frac{d\gamma}{dt}}_{\frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt}} \vec{v} + \gamma m_0 \vec{a}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{\gamma m_0} - \underbrace{\frac{\vec{v}}{\gamma m_0 c^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})}_{\beta^2\text{のオーダー＝非常に小さい！}}$$

4.8 一般 Lorentz 変換

2.2 節で考えた Lorentz 変換は x 軸に平行に動いている座標系への変換を考えたが、ここではより一般的な座標系への変換を考える。

静止系 $\mathcal{S}(ct,x,y,z)$ に対して運動系 $\mathcal{S}'(ct',x',y'z')$ は速度 $\vec{V}$ で運動しているとする。時刻 $t=t'=0$ で 2 つの座標系の原点が一致したとする。ここで $\mathcal{S}'$ の原点 $\vec{r'}=0,\ \vec{r}=\vec{V}t$ を考える。
$\vec{\beta}=\vec{V}/c$ として、未知定数 A,B,D,E を用いて

$$t' = At + \frac{B}{c}(\vec{\beta}\cdot\vec{r})$$
$$\vec{r'} = D(\vec{r}-\vec{\beta}ct) + E\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot(\vec{r}-\vec{\beta}ct))$$

と書けると仮定する。時空間隔 $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ が Lorentz 不変であることを用いると、4 つの未知数を決定することができる。[5] $A=\gamma,\ B=-\gamma$, $D=1$, $E=(\gamma-1)/\beta^2$ であるから、求める一般 Lorentz 変換の式は

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}}{c}\right)$$
$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{\beta}\,c\,t + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\{\vec{\beta}\cdot(\vec{r}-\vec{\beta}\,c\,t)\} = \vec{r}_\perp + \gamma_V(\vec{r}_\parallel - \vec{\beta}ct)$$

$\vec{r}$ の $\vec{V}$ 方向成分 $\vec{r}_\parallel$ とそれに直交する成分 $\vec{r}_\perp$ に分割すると都合がいいので、分けることにすると、

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{r}_\parallel) \tag{4.16}$$
$$\vec{r'} = \vec{r'}_\parallel + \vec{r'}_\perp \tag{4.17}$$
$$\vec{r'_\parallel} = \gamma(-\vec{\beta}ct + \vec{r}_\parallel) \tag{4.18}$$
$$\vec{r'}_\perp = \vec{r}_\perp \tag{4.19}$$

[5] 面倒だが実際に計算してみる。

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= -(cdt)^2 + (d\vec{r})^2\\
&= -\{cAdt' - B(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'})\}^2 + \{D(d\vec{r'} + \vec{\beta}cdt') - E\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot(d\vec{r'} + \vec{\beta}cdt'))\}^2\\
&= -c^2A^2(dt')^2 + 2cABdt'(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'}) - B^2(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'})^2\\
&\quad + D^2(d\vec{r'})^2 + 2cD^2dt'(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'}) + \beta^2c^2D^2(dt')^2 - 2DE(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'})^2 - 4\beta^2cDEdt'(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'}) - 2\beta^4c^2DE(dt')^2\\
&\quad + \beta^2E^2(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'})^2 + 2\beta^4cE^2dt'(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'}) + \beta^6c^2E^2(dt')^2\\
&= -c^2(A^2 - \beta^2D^2 + 2\beta^4DE - \beta^6E^2)(dt')^2 + (2cAB + 2cD^2 - 4\beta^2cDE + 2\beta^4cE^2)dt'(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'})\\
&\quad + (-B^2 - 2DE + \beta^2E^2)(\vec{\beta}\cdot d\vec{r'})^2 + D^2(d\vec{r'})^2\end{aligned}$$

時刻 0 での原点の一致や $\vec{\beta}$ が微小の時非相対論と一致することを考慮すると、A,B,D,E をすべて決めることができる。

4.9　速度の一般変換則

一般 Lorentz 変換を用いて速度の変換則を書きなおす。

$$\vec{v'} = \frac{d\vec{r'}}{dt'} = \frac{\frac{\vec{v}_\perp}{\gamma} + \vec{v}_\parallel - c\vec{\beta}_V}{1 - \frac{\vec{\beta}_V \cdot \vec{v}_\parallel}{c}} \tag{4.20}$$

$\vec{\beta} = \vec{v}/c\,,\ \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}\,,\ \vec{\beta}_V = \vec{V}/c\,,\ \gamma_V = 1/\sqrt{1-{\beta_V}^2}\,,\ \vec{\beta'} = \vec{v'}/c\,,\ \gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$ とすると、

$$\frac{\gamma\gamma_V}{\gamma'} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{\beta_V} \cdot \vec{v}}{c}}$$

4.10　力の一般変換則

4.7 節で導いた (4.15) 式は一般 Lorentz 不変であるから、

$$\gamma'\vec{F'} = \gamma\vec{F}_\perp + \gamma_V(\gamma\vec{F}_\parallel - \frac{\gamma}{c}(\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{\beta}_V)$$

$$\therefore \quad \vec{F'} = \frac{\vec{F}_\perp/\gamma_V + \vec{F}_\parallel - \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}\vec{\beta}_V}{1 - \frac{\vec{\beta}_V\cdot\vec{v}}{c}} \tag{4.21}$$

$\mathcal{S}$ 系において $\vec{v} = 0$ とすると、$\vec{F} = \vec{F}_0$ として、

$$\vec{F'}_\parallel = \vec{F}_{0\parallel} \tag{4.22}$$

$$\vec{F'}_\perp = \frac{\vec{F}_{0\parallel}}{\gamma_V} \tag{4.23}$$

第 5 章　相対論的電磁気学

電磁気学の作り方は以下のようになる。

- 特殊相対論＋ Coulomb の法則 $\Rightarrow$ 電磁気学の体系
  ここでの電磁気学は Coulomb の法則と特殊相対論を原理とする。
  「電荷が電場 $\vec{E}$ を作る」という Coulomb の法則で電場を定義。電場から受ける力 $\vec{F}$ を力の一般 Lorentz 変換を用いて変換すると、電場から受ける力以外の Newtype[1]の力が現れるので、これの源を磁場 $\vec{B}$ と定義する。
- 力の変換則を手掛かりとして電磁場の変換則を求める。
- これまで習った電磁気学 (以下では旧電磁気学と呼ぶことにする。) との対応を見ていく。
  「電流が磁場をつくる」という Biot-Savart の法則[2]などを導き、最終的に Maxwell 方程式を求める。
- 電磁場 $\vec{E}, \vec{B}$ →**電磁ポテンシャル (4 元)**$\phi, \vec{A}$
  電磁場より根源的な 4 元電磁ポテンシャル (スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$) を求める。

5.1　Coulomb の法則

電荷は電場を作り、また電場から力を受ける。いま、位置が $\vec{r}$ の静止電荷 q が作る電場 $\vec{E}$ を考えてみると、$\vec{r}_1$ の位置にある試験電荷 q_1 が受ける力は

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q q_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \tag{5.1}$$

であり、これを用いて電場を定義する。

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \tag{5.2}$$

相対論的電磁気学においてはこの Coulomb の法則と 4.8 節で述べた一般 Lorentz 変換を原理として電磁気学を構成する。

5.2　磁気的な力

Coulomb の法則では 静止している電荷から働く力を考えていたが、今度は運動している電荷から働く力を考える。

静止系 $\mathcal{S}$ に対して速度 $\vec{V}$ で動いている運動系 $\mathcal{S}'$ の原点に電荷 q が静止しているとする。$\mathcal{S}$ 系において $\vec{v}$ で運動している試験電荷 q_1 に働く力を $\mathcal{S}'$ 系から考える。q_1 の座標を $\mathcal{S}$ 系では $\vec{r}$, $\mathcal{S}'$ 系では $\vec{r'}$ とすると、

$$\vec{F'} = q_1 \vec{E'} \quad \left(\vec{E'} = kq \frac{\vec{r'}}{r'^3} \right)$$

[1] 300 号おめでとう。
[2] Biot と Savart は別の人です。ってご存知ですよね。

これに対して、力の変換則と速度の変換則

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{\frac{1}{\gamma_V}\vec{F'_\perp} + \vec{F'_\parallel} + \vec{\beta_V}(\vec{F'}\cdot\vec{\beta'})}{1+\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta'}} \\
\vec{\beta'} &= \frac{\frac{\vec{\beta_\perp}}{\gamma_V} + \vec{\beta_\parallel} - \vec{\beta_V}}{1-\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta}} \\
\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta'} &= \frac{\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta} - {\beta_V}^2}{1-\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta}} \\
\therefore \quad 1+\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta'} &= \frac{1}{{\gamma_V}^2(1-\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta})}
\end{aligned}
$$

を適用する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\vec{F}}{\gamma_V^2} &= (1-\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta})\left(\frac{\vec{F'_\perp}}{\gamma_V} + \vec{F'_\parallel} + \vec{\beta_V}(\vec{F'}\cdot\vec{\beta'})\right) \\
&= (1-\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta})\left(\frac{\vec{F'_\perp}}{\gamma_V} + \vec{F'_\parallel}\right) + \vec{\beta_V}\left[\vec{F'}\cdot\left(\frac{\vec{\beta_\perp}}{\gamma_V} + \vec{\beta_\parallel} - \vec{\beta_V}\right)\right] \\
&= (1-\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta})\left(\frac{\vec{F'_\perp}}{\gamma_V} + \vec{F'_\parallel}\right) + \vec{\beta_V}\left[\vec{F'_\perp}\cdot\frac{\vec{\beta_\perp}}{\gamma_V} + \vec{F'_\parallel}\cdot\vec{\beta_\parallel} - \vec{F'_\parallel}\cdot\vec{\beta_V}\right] \\
&= \frac{\vec{F'_\perp}}{\gamma_V} + (1-{\beta_V}^2)\vec{F'_\parallel} + \frac{1}{\gamma_V}\left[\underbrace{(\vec{F'_\perp}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta_V} - (\vec{\beta_V}\cdot\vec{\beta})\vec{F'_\perp}}_{\text{ベクトル 3 重積}}\right] \\
\therefore \quad \vec{F} &= \gamma_V\vec{F'_\perp} + \vec{F'_\parallel} + \gamma_V\vec{\beta}\times(\vec{\beta_V}\times\vec{F'_\perp}) \\
&= q_1\gamma_V\vec{E'_\perp} + q_1\vec{E'_\parallel} + q_1\gamma_V\vec{\beta}\times(\vec{\beta_V}\times\vec{E'_\perp}) \\
\vec{E} &= \gamma_V\vec{E'_\perp} + \vec{E'_\parallel} + \gamma_V\vec{\beta}\times(\vec{\beta_V}\times\vec{E'_\perp})
\end{aligned}
$$

となる。

こうして求めた $\mathcal{S}$ 系での電場 $\vec{E}$ の式は 2 種類の項に分けられる。具体的には第 1 項, 第 2 項のセットと第 3 項である。前者は電場を変換した形のようであるが、後者は試験電荷の速度 $\vec{v} = c\vec{\beta}$ に依存する別タイプの項であるので、電場とは異なる場「**磁場**」と電磁場から受ける力「**Lorentz 力**」を以下のように定義する。

■ **電場**(新定義)

$$\vec{E} = \vec{E'_\parallel} + \gamma_V\vec{E'_\perp} \tag{5.3}$$

■ **磁場**

$$\vec{B} = \frac{\gamma_V}{c}\vec{\beta_V}\times\vec{E'_\perp} \tag{5.4}$$

■ **Lorentz 力**

$$\vec{F} = q_1(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{5.5}$$

これで Coulomb の法則と一般 Lorentz 変換から磁場を「発見」することができた。しかしながら電場しかない系から電場と磁場の両方が存在する系への変換のみを考えただけで電磁場の変換としては普遍性に欠ける。これではあんまり使えない。つまり、電場と磁場の両方が存在する 2 つの異なる系の間の変換則を知りたいわけである。

5.3 電磁場の変換則

$\mathcal{S}$ 系での電磁場を $\vec{E},\vec{B}$、$\mathcal{S}$ に対して速度 $\vec{V}$ で動く $\mathcal{S}'$ 系での電磁場を $\vec{E}',\vec{B}'$ とする。
$\mathcal{S}$ 系での Lorentz 力は

$$\vec{F}=q_1(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

他方、$\mathcal{S}'$ 系での Lorentz 力は

$$\begin{aligned}\vec{F}'&=q_1(\vec{E}'+\vec{v}'\times\vec{B}')\\&=\vec{F}_\parallel+\gamma_V\vec{F}_\perp-\gamma_V\vec{\beta}'\times(\vec{\beta}_V\times\vec{F}_\perp)\\&=\vec{F}_\parallel+\gamma_V(1+\vec{\beta}_V\cdot\vec{\beta}')\vec{F}_\perp-\gamma_V\vec{\beta}_V(\vec{\beta}'\cdot\vec{F}_\perp)\end{aligned}\tag{※}$$

である。(※) に対して、

$$\begin{aligned}\vec{F}_\parallel&=q_1(\vec{E}_\parallel+\vec{v}_\perp\times\vec{B}_\perp)\\\vec{F}_\perp&=q_1(\vec{E}_\perp+\vec{v}_\parallel\times\vec{B}_\perp+\vec{v}\times\vec{B}_\parallel)\\\vec{\beta}_\parallel&=\frac{\vec{\beta}'_\parallel+\vec{\beta}_V}{1+\vec{\beta}_V\cdot\vec{\beta}'}\\\vec{\beta}_\perp&=\frac{\vec{\beta}'_\perp/\gamma_V}{1+\vec{\beta}_V\cdot\vec{\beta}'}\end{aligned}$$

を代入する。[3]すると、(※) は

$$\vec{F}'=q_1[\ \underbrace{\vec{E}_\parallel+\gamma_V\vec{E}_\perp+c\gamma_V\vec{\beta}_V\times\vec{B}_\perp}_{\vec{E}'}+\vec{v}'\times(\underbrace{\vec{B}_\parallel+\gamma_V\vec{B}_\perp-\frac{\gamma_V}{c}\vec{\beta}_V\times\vec{E}_\perp)}_{\vec{B}'}\ ]$$

となる。[4]以上をまとめると、

■ **電磁場の変換則**

$$\vec{E}'_\parallel=\vec{E}_\parallel\tag{5.6}$$
$$\vec{E}'_\perp=\gamma_V(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})_\perp\tag{5.7}$$
$$\vec{B}'_\parallel=\vec{B}_\parallel\tag{5.8}$$
$$\vec{B}'_\perp=\gamma_V\left(\vec{B}-\frac{\vec{V}\times\vec{E}}{c^2}\right)_\perp\tag{5.9}$$

である。

ここまでは一般的な議論をしてきたが、特殊相対論を使わない旧電磁気学では Ampère の法則もしくは Biot-Savart の法則を用いて磁場を定義し、さらに簡単な例として直線電流が作る磁場を挙げて説明するという手法が多かったと思う。そこで、もう少し直感的にわかるようにここでまた直線電流の場合を考えてみよう。

静止系 $\mathcal{S}$ とそれに対して x 軸正方向に速さ v で運動する運動系 $\mathcal{S}'$ があるとする。
$\mathcal{S}$ 系において、静止している無限に長い導線が x 軸に重なるように固定されて置かれており、その中では自由電子が等間隔を保ったまま速さ v で x 軸正方向に移動していて、陽イオンは全く静止しているとする。この導線が作る電磁場を求めるために試験電荷 q を導線から b だけ離れたところを速さ v で x 軸正方向に運動させる。

[3]第 1 式で $\vec{v}_\perp\times\vec{B}_\perp$ という項が登場する。これは一見ゼロのように思われるが、下付き添え字に $\perp$ がついているベクトルは $\parallel$ がついているベクトルに直交する平面上にあるというだけなので、この項はゼロとは限らない。あ、そんなこと思うの僕だけですよねすみません。

[4]計算はめんどくさいので省略。

他方、$\mathcal{S}'$ 系から見ると、試験電荷と自由電子は静止しており、陽イオンが等間隔を保ったまま x 軸**負**方向に速さ v で運動している。
まず $\mathcal{S}$ 系での導線の電荷の線密度を $\pm\lambda_0$[C/m] とする。すると、導線中の陽イオン・自由電子が作る電場はそれぞれ

$$E_\pm = \pm\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}$$

であるから、電場は相殺する。
対して $\mathcal{S}'$ 系では Lorentz 収縮が起こるので、導線中の陽イオン・自由電子の間隔が変化する。すなわち、それぞれの電荷線密度が変化することになるのである。その値は、

$$\lambda_+ = \gamma\lambda_0, \quad \lambda_- = -\frac{1}{\gamma}\lambda_0$$

となるので、全体の電荷密度は $\lambda' = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0(\gamma - \frac{1}{\gamma})$ となる。ゆえに受ける力は

$$F' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda' q}{b} = \frac{\lambda_0 q}{2\pi\varepsilon_0 b}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$$

である。[5]この F' を力の変換則を用いて、$\mathcal{S}$ 系に戻す。$\vec{\beta}' = 0$ であるから、

$$F = \frac{F'}{\gamma} = \frac{\lambda_0 q}{2\pi\varepsilon_0 b}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{\lambda_0 q\beta^2}{2\pi\varepsilon_0 b}$$

である。[6]$I = \lambda_0 v$ を用いて書きなおすと、

$$F = \frac{qI}{2\pi\varepsilon_0 b}\frac{v}{c^2} = qv\,\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ であるから、次の法則が導かれる。

■ **Ampère の法則 (直線電流)**

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

さて、$\mathcal{S}$ 系での電子の速度 v を考えてみる。10A の電流が断面積 1mm^2 の銅でできた導線を流れる場合を考えると、細かい計算[7]を除けば、$v = 0.6$mm/s というおよその値が求められる。すなわち、10A ほどの電流をかけても電子の速度はその程度にしかならないわけである。また、$\beta = 2 \times 10^{-12}$ であるから、

$$\gamma - 1 \simeq \frac{\beta^2}{2} = 2 \times 10^{-24}$$

である。
しかしながら、スイッチと電池、電球、ある程度の長さの導線のみで構成されているようなよくある回路を考える。電子の速度は微少であるにもかかわらず、周知の通り、スイッチをオンにした瞬間に電球が点灯する。すなわち、電子は遅いが、作用は素早く伝わるのである。
仮想的に電池とスイッチを地球に置き、月に電球を置き、それらを導線でつないだ回路を考える。スイッチをオンすると、約 1 秒後に電球は光る。月と地球の距離はおよそ 38 万 km なのでだいたい光の速さで作用が伝わっているとわかる。この「作用」を考えるために以下のポインティング・ベクトルというものを考えてみよう。

[5]もちろん導線は磁場も作っているが、試験電荷は静止しているので Lorentz 力の磁場による項は存在しない。
[6]こちらは電場が相殺しているので、磁場による項のみ存在する。
[7]面倒なので省略。ノートを参照してください。

■ **ポインティング・ベクトル　Poynting Vector**[8]

$$\vec{S}_p \equiv \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} \tag{5.10}$$

波数ベクトル $\vec{k}$ の方向に平面波として進む電磁波[9]を考えると、その電磁場は

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E_0}\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B_0}\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$$

と表せる。この 2 式の実部が実際の波である。
分散関係 $k=\sqrt{\mu\varepsilon}\omega$ と、$\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}$ から、

$$\sqrt{\mu\varepsilon}\ \vec{k}\times\vec{E} = k\vec{B}$$

なので、

$$\vec{S}_p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ [\ |\vec{E}|^2\vec{k}-(\vec{E}\cdot\vec{k})\vec{E}\ ] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ |\vec{E}|^2\vec{k} \tag{5.11}$$

である。
また、P.V. の時間平均をとってみると、

$$<\vec{S}_p>=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ |\vec{E}_0|^2\vec{k}$$

であり、ここで次で定義されるエネルギー密度を導入する。

■ **エネルギー密度**

$$u \equiv \frac{1}{2}\left(\varepsilon\vec{E}^2+\frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right) \tag{5.12}$$

すると、エネルギー密度の時間平均は $<u>=\frac{1}{2}\varepsilon|\vec{E}_0|^2$ であるから、$v_p=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{n}$ (n は光の屈折率) とすると、

$$<\vec{S}_p>=v_p<u>\vec{k} \tag{5.13}$$

となる。これは $\vec{k}$ 方向へのエネルギー密度の流れを表している。その伝播速度は v_p であり、すなわちエネルギーは瞬時に伝わるのではなく、伝播するのに時間がかかるわけである。そういうわけで「作用」が伝わるのに時間がかかるわけである。

5.4　Biot-Savart の法則

5.3 節で求めた電磁場の変換則を用いて磁場の一般式を与える Biot-Savart の法則を求めてみよう。導線上を電流 I が流れていて、導線の微小部分 $d\vec{s}$ が、そこから $\vec{r}$ の位置に作る磁場 $d\vec{B}$ を求めてみる。
まずは、電流の微小部分に着目して、電荷の移動で出来る磁場を考える。静止系 $\mathcal{S}$ に対して速度 $\vec{V}$ で動く運動系 $\mathcal{S}'$ 上で、$\vec{r_1'}$ の位置に電荷 q が静止しているとき、$\vec{r_2'}$ の位置での電磁場を考えてみる。電磁場の変換則より

$$\vec{B} = \frac{\gamma_V}{c}\vec{\beta}_V\times\vec{E'_\perp}$$

[8] Pointing ではなく Poynting が正しく、人名なんだそうです。John Henry Poynting がフルネーム。以下では Poynting Vector を P.V. と略すことにする。
[9] ここでの電磁波は真空中のものとは限らない。

であり、$\vec{r'}=\vec{r_2'}-\vec{r_1'},\vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$ とすると、$\vec{E'}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\vec{r'}$ であるから、

$$\vec{B}=\frac{\gamma_V q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\vec{V}\times\vec{r'_\perp}}{r'^3}$$

であり、一般 Lorentz 変換によって座標を変換すると、

$$\begin{aligned}
\vec{r_1'} &= \vec{r}_{1\perp}+\gamma_V(\vec{r}_{1\parallel}-\vec{V}t)\\
\vec{r_2'} &= \vec{r}_{2\perp}+\gamma_V(\vec{r}_{2\parallel}-\vec{V}t)\\
\vec{r'} &= \vec{r}_{2\perp}-\vec{r}_{1\perp}+\gamma_V(\vec{r}_{2\parallel}-\vec{r}_{1\parallel})\\
\therefore \quad \vec{V}\times\vec{r'_\perp} &= \vec{V}\times(\vec{r}_{2\perp}-\vec{r}_{1\perp})=\vec{V}\times\vec{r}
\end{aligned}$$

であるから、$q\vec{V}\leftrightarrow Id\vec{s}$ であることを考えると、ある定数 K を用いて、

$$d\vec{B}=K\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

と書ける。ここで、無限に長い直線電流の場合は、$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$ だったことを思い出すと、$K=\frac{\mu_0 I}{4\pi}$ と求められて、次の Biot-Savart の法則の微分形がわかる。それを全電流について積分すると積分形も求められる。

■ **Biot-Savart の法則 (微分形)**

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} \tag{5.14}$$

■ **Biot-Savart の法則 (積分形)**

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{d\vec{s'}\times\vec{R}}{R^3} \tag{5.15}$$

(ただし、$\mathcal{C}$ は電流の流れている曲線、$\vec{R}=\vec{r_1}-\vec{r_2}$ とする。)

さらに、Biot-Savart の法則を電流密度というベクトルを用いて表してみよう。電流密度を以下で定義する。

■ **電流密度** $\vec{i}$ [A/m^2] [10]
電流の流れに垂直な面を通って単位面積当たりに流れる電流の量

すると、

■ **Biot-Savart の法則 (積分形)**

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{i}(\vec{r'})\times\vec{R}}{R^3}dV' \tag{5.16}$$

さて、電流密度については以下のような電荷保存則が成り立つ。
任意の閉曲面 $\mathcal{S}$ をとり、$\mathcal{S}$ で囲まれた領域を $\mathcal{V}$ とする。$\mathcal{V}$ 上での電荷密度を ρ とすると、

$$I=\int_{\mathcal{S}}\vec{i}\cdot d\vec{S}=-\frac{dQ}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho dV$$

であり、また、Gaußの発散定理から、

[10] ここからは電流密度は $\vec{i}$ と書くことにします。

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{i} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{i} dV$$

である。すなわち、

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{i} \right) dV = 0$$

が成り立つということになる。これは閉曲面 $\mathcal{S}$ の取り方によらないので被積分関数$= 0$ が成り立つことがわかり、次の電荷保存則が得られる。

■ 電荷保存則

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{i} = 0 \tag{5.17}$$

相対論では、4 元ベクトル (テンソル) の方が根本的なので、4 元座標や 4 元運動量のように 4 元電流密度というものを定義しておこう。

■ 4 元電流密度

$$i^\mu = (c\rho, \vec{i}) \tag{5.18}$$

■ 4 元電流密度の変換則

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \vec{\beta} \cdot \vec{i_\parallel}) \tag{5.19}$$

$$\vec{i'} = \vec{i_\perp} + \gamma(\vec{i_\parallel} - \vec{\beta} c\rho) \tag{5.20}$$

さらに、4 元テンソルに対応する微分演算子 ∇_μ を定義しておく。

$$\nabla_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{5.21}$$

この ∇_μ を用いて 4 元テンソルの発散を定義しておく。

$$\mathrm{Div} x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \nabla_\mu x^\mu = \nabla_\mu x^\mu \tag{5.22}$$

第 3 式のように特に誤解のない場合は $\sum$ の記号を略して書く。[11]
4 元電流密度の発散を考えると電荷保存則から、

$$\nabla_\mu i^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{i} = 0$$

である。
さて、座標や運動量に Lorentz 変換を施せば、微分演算子、つまり ∇_μ も変換される。
微分演算子の対応は

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\beta c\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

[11] これを **Einstein の規約**という。

となる。Lorentz 変換を施したときにこのような係数行列がつくベクトルを**共変ベクトル (テンソル)** という。これに対して、4 元座標や 4 元運動量のように次のような係数行列がつくものを**反変ベクトル**という。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

以下では、下付き添え字のベクトルは**共変ベクトル (テンソル)**、上付き添え字のベクトルは**反変ベクトル**とする。一般 Lorentz 変換で考えると、

■ **一般 Lorentz 変換 (共変ベクトル)**

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\beta}\cdot\vec{\nabla}_{\parallel}\right) \tag{5.24}$$

$$\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}_{\perp} + \gamma\left(\vec{\nabla}_{\parallel} + \vec{\beta}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{5.25}$$

■ **一般 Lorentz 変換 (反変ベクトル)**

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{r_{\parallel}}) \tag{5.26}$$

$$\vec{r'} = \vec{r}_{\perp} + \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta}ct) \tag{5.27}$$

となる。また、

$$\nabla_\mu \nabla^\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Box$$

である。[12]

この後授業では δ 関数について話をしていたがこのノートでは省略させていただく。各自ノートを確認していただきたい。

5.5　静電場・静磁場に対する Maxwell 方程式

静電磁場 (時間変化しない電磁場) の Maxwell 方程式は Coulomb の法則と Biot-Savart の法則から導ける。
閉曲面 $\mathcal{S}$ とそれに囲まれた領域 $\mathcal{V}$ を考え、領域 $\mathcal{V}$ 上での電荷密度を $\rho(\vec{r})$、電流密度を $\vec{i}(\vec{r})$ とする。
Coulomb の法則は電荷密度 ρ を用いて表すと、

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} dV'\rho(\vec{r'})\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} dV'\rho(\vec{r'})\frac{\vec{R}}{R^3}$$

である。$\vec{\nabla}\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$ であるから、

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{grad}\int_{\mathcal{V}} dV'\frac{\rho(\vec{r'})}{R}$$

となる。これの発散・回転を取ると $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{R} = \Delta\frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R})$ より、

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} dV'(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'}))\rho(\vec{r'}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{5.28}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{rot\ grad}\int_{\mathcal{V}} dV'\frac{\rho(\vec{r'})}{R} = 0 \quad (\because \mathrm{rot\ grad}\phi \equiv 0) \tag{5.29}$$

となる。(5.28) 式は Coulomb の法則と等価であり、(5.29) 式は Faraday の電磁誘導則の静磁場バージョンである。

[12] $\Box$ はダランベルシアン D'alembertian と呼ばれる演算子である。五角形とか六角形とかもあんのかね…。

次に Biot-Savart の法則を考えてみよう。
電流密度 $\vec{i}$ を用いた形の Biot-Savart の法則は

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{i}(\vec{r'}) \times \vec{R}}{R^3} dV'$$

$\vec{\nabla} \times \vec{i}(\vec{r'}) = 0$ なので、

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{i}}{R} = \frac{\vec{i}(\vec{r'}) \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\therefore \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{rot}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} dV'$$

となる。磁場の発散を取ると、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{div\ rot}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} = 0(\because \mathrm{div\ rot}\phi \equiv 0)$$

となる。これは電場の発散密度が電荷密度で与えられることを表している div$\vec{E}$ と比較すると、静電磁場を考えるとき、磁場の発散密度を与える**磁気単極子 magnetic monopole は存在しない**ということを表している。
他方、磁場の回転を取ると、

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{grad\ div}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} - \frac{\mu_0}{4\pi}\Delta\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R}$$

である。

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} = -\vec{i}(\vec{r'}) \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}$$

ここで $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$ であること思い出すと、

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{R} = \underset{\sim}{+} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

であるから、

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} = -\vec{i}(\vec{r'}) \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{R} = \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r'})}{R} - \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R}$$

$$\therefore \quad \mathrm{div}\int_{\mathcal{V}} dV' \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} = \int_{\mathcal{V}} dV' \left[\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r'})}{R} - \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R}\right] = \int_{\mathcal{V}} dV' \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \int_{\mathcal{S}} d\vec{S'} \cdot \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} = 0$$

($\therefore$ 　電荷の保存則と発散定理)

したがって、磁場の回転は

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} (-4\pi\delta(\vec{R}))\vec{i}(\vec{r'}) = \mu_0 \vec{i}(\vec{r})$$

である。
以上をまとめると、

■ **静電場・静磁場の Maxwell 方程式**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{5.30}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} \tag{5.31}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.32}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.33}$$

となる。
Ampère の法則は上の方程式から導かれた静磁場に関する法則であり、Stokes の定理を用いれば示すことができる。

■ **Ampère の法則**

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_0 I \tag{5.34}$$

5.6　時間変化する電場・磁場に対する Maxwell 方程式

前節で静電磁場についての Maxwell 方程式を求めたので、今度は時間変化する電磁場 ($\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\neq 0,\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\neq 0$) に対する Maxwell 方程式を求める。Maxwell 方程式は Lorentz 不変な方程式であることを念頭に置いて、電磁場の変換則と微分演算子の Lorentz 変換を使う。

静止系 $\mathcal{S}$ での電磁場が前節で求めたような

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \tag{5.35}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{i} \tag{5.36}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.37}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{5.38}$$

であるとする。$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ ならば$\vec{\nabla}'\cdot\vec{B}'=0$ となるはずなので、

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}'\cdot\vec{B}' &= \left[\vec{\nabla}_\perp + \gamma_V\left(\vec{\nabla}_\parallel + \vec{\beta}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\cdot\left[\vec{B}_\parallel + \gamma_V\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{\beta}\times\vec{E}_\perp}{c^2}\right)\right] \\
&= \gamma_V\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + \frac{\gamma_V}{c}\,\vec{\beta}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_\parallel
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \left(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_\parallel = 0$$

が成立することがわかる。最後の式の左辺は $\vec{\beta}$ 方向のベクトルなので $\vec{\beta}$ との内積がゼロになるのは左辺 $=0$ の時に限られる。この式を用いると同様に、

$$\left(\vec{\nabla}'\times\vec{E}' + \frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}\right)_\parallel = 0$$

も成り立つことが分かる。
同様に同じものの垂直成分を計算すると、

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_\perp = \left(\vec{\nabla}'\times\vec{E}' + \frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}\right)_\perp$$

がわかる。以上から $(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t})_\perp = 0$ を仮定すれば、

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \\
\vec{\nabla}'\times\vec{E}' + \frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'} &= 0
\end{aligned}$$

が成り立つのである。
次は Gaußの法則を考える。$\mathcal{S}'$ 系での Gaußの法則は

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0}$$

であるから、これに各 Lorentz 変換式を適用して、

$$\left[\vec{\nabla}_\perp + \gamma_V\left(\vec{\nabla}_\parallel + \vec{\beta}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\cdot\left[\vec{E}_\parallel + \gamma_V\vec{E}_\perp + c\gamma_V\vec{\beta}_V\times\vec{B}_\perp\right] = \frac{\gamma_V}{\varepsilon_0 c}(c\rho - \vec{\beta}\cdot\vec{i}_\parallel)$$

したがって、先ほどと同様に計算すれば、

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{i}$$
$$\vec{\nabla}'\times\vec{B}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'} = \mu_0\vec{i}'$$

がわかる。
以上をまとめると、

■ **時間変化する電磁場の Maxwell 方程式**

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.39}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{i} \tag{5.40}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.41}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{5.42}$$

となる。これが Coulomb の法則と特殊相対論から求められた。

Maxwell 方程式はベクトルについて 2 本、スカラーについて 2 本なのであわせて 8 本の方程式である。しかし、未知数は電磁場の各成分なので 6 個しかない。実は、下の 2 式 (Gaußの法則と「磁荷」が存在しないという式) は初期条件を与えている式であり、一般解を求めるのには上のベクトルについての 2 式を解けばよいのである。

5.7　4 元電磁ポテンシャル

(5.42) 式より磁場は回転的であることがわかるので、**ベクトルポテンシャル**$\vec{A}$ を導入し、これを用いて、

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{5.43}$$

と書くことにする。このとき (5.39) 式を書きなおすと、

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

となる。このことから電場 $\vec{E}$ は適当なスカラーポテンシャル ϕ を用いて、

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \tag{5.44}$$

と書ける。
ここで電流密度の時と同様に、4 元電磁ポテンシャルを定義しておこう。

■ **4 元電磁ポテンシャル**

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \tag{5.45}$$

さて、以上のように電磁ポテンシャル $\phi, \vec{A}$ というものを用いて電場と磁場を書き表すことができた。実は電磁気学においては電磁場 $\vec{E}, \vec{B}$ よりも電磁ポテンシャル $\phi, \vec{A}$ の方が根本的であるという考えが主流である。そこで、ここから先は電磁ポテンシャルの性質について考えていく。
まずは次のようなゲージ変換というものを考えてみよう。

■ **ゲージ変換 gauge transformation**

$$\phi' = \phi - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.46}$$
$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} u \tag{5.47}$$
$$(\, A'^{\mu} = A^{\mu} + \nabla^{\mu} u \,) \tag{5.48}$$

(u は任意関数)

このとき

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial(\vec{\nabla} u)}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi = \vec{E} \tag{5.49}$$
$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \tag{5.50}$$

となり、電磁場は保存する。つまり、電磁ポテンシャルはゲージ不変ということであり、言いかえれば、いかなるゲージ u を持ってきてゲージ変換を施してもかまわないということである。[13]その点で電磁ポテンシャルは 1 つの自由度を持っていると言える。ならば、この自由度を使って Maxwell 方程式が (主観によると思うが) すっきりした形になるようにゲージ変換をしてやろうではないか、と考える。
適当なゲージ変換を施して、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

という**ローレンス条件 (Lorenz 条件)**[14]を満たすような電磁ポテンシャルを考える。
ローレンツ条件は 4 元で書くと $\mathrm{Div} A^{\mu} = \nabla_{\mu} A^{\mu} = 0$ であるから、

$$\Box\, \phi = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.51}$$
$$\Box\, \vec{A} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0 \vec{i} \tag{5.52}$$
$$\Box\, A^{\mu} = -\mu_0 i^{\mu} \tag{5.53}$$

というダランベール方程式が求められる。上記の方程式の 1 つの解は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} dV' \frac{\rho(\vec{r'})}{R} \tag{5.54}$$
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} dV' \frac{\vec{i}(\vec{r'})}{R} \tag{5.55}$$

である。(これは静電磁場における解。ラプラス方程式の解である。)

5.8　物質中の電磁場と Maxwell 方程式

今までは真空中での電磁場を考えてきたが、今度は物質中での電磁場を考えてみよう。
不導体の物質に対して電場をかけると物質中で誘電分極が起きる。誘電分極が起こると物質中の電荷密度が変化

[13] さすがにぐっちゃぐちゃな関数をゲージとして持ってきたらダメそうだけど…
[14] ローレン**ツ**は Loren**tz**(1853-1928)、ローレン**ス**は Loren**z**(1829-91)。ローレンスのが先輩かw論文発表もローレンツ変換よりローレンス条件の方が早かったそうです。

するため電気双極子のようになる。
(5.54) 式に対して $|\vec{r}| \gg |\vec{r'}|$ が成り立つときの近似式

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r'} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\cdots$$

を代入すると、右辺第 1 項は微小ゆえ無視できて、

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} dV'\rho(\vec{r'})\vec{r'} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

双極子モーメント $\vec{p} = \int dV'\rho(\vec{r'})\vec{r'}$ を導入すると、

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

となる。単位体積当たりの双極子モーメントを $\vec{P}$ とおくと、$\vec{p} = \int dV'\vec{P}(\vec{r'})$ なので、

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\vec{P}(\vec{r'}) \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) \\
\therefore \quad \Delta\phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\vec{P}(\vec{r'}) \cdot \vec{\nabla}\left(\Delta\frac{1}{R}\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})
\end{aligned}$$

となる。ゆえに、真空中での $\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$ という式と比較して、仮想的な電荷密度

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

とする。
同様に物質中の仮想的な電流密度を考える。電流 I が半径 a の円 $\mathcal{C}$ 上を流れているとする。その中心から電流の流れている点までのベクトルを $\vec{s}$、$\mathcal{C}$ に垂直であり、電流に対して右ねじの向きを向いている、大きさが $S = \pi a^2$ のベクトル $\vec{S}$ を用いると、磁気モーメントは

$$\vec{m} = I\left(\frac{1}{2}\oint \vec{s} \times d\vec{s}\right) = I\vec{S}$$

であるから、ベクトルポテンシャルは

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

と書ける。[15]単位体積当たりの磁気モーメントを $\vec{M}$ とおくと、$\vec{m} = \int dV'\vec{M}(\vec{r'})$ なので、

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\vec{M}(\vec{r'}) \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) \\
\therefore \quad \Delta\vec{A}(\vec{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\vec{M}(\vec{r'}) \times \vec{\nabla}\left(\Delta\frac{1}{R}\right) \\
&= -\mu_0\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})
\end{aligned}$$

ゆえに、真空中での $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{i}(\vec{r})$ という式と比較して、仮想的な電流密度

$$\vec{i}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

[15] この導出はレポートの問 6 です。

とする。
したがって物質中での Maxwell 方程式は

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\vec{i} + \vec{i}_M)$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P)$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

と書けて、これに対して補助場 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ とおくと、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.56}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i} \tag{5.57}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \tag{5.58}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.59}$$

となり真の電荷密度 ρ と真の電流密度 $\vec{i}$ だけを用いて表すことができる。$\vec{D} \propto \vec{E}, \vec{H} \propto \vec{B}$ であるから、$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ (ε, μ : 物質中の誘電率、透磁率) とおくと、ここではローレンス条件を

$$\varepsilon\mu\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

と取れば、

$$-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.60}$$
$$-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \Delta\vec{A} = -\mu\vec{i} \tag{5.61}$$

となる。なお、この物質中での光速は

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n} \tag{5.62}$$

である。n はいわゆる屈折率というもので、物質中での光の進みにくさをあらわす量で、各物質に固有の値である。

5.9　共変形式の Maxwell 方程式

いままでに導入してきた 4 元ポテンシャルや 4 元電流密度を用いて、4 元ベクトルで Maxwell 方程式を表すことを考えてみよう。

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

とすると、$\mu = 0, \nu = 1$ の時、

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{E_x}{c}$$

同様にして μ, ν を 0〜3 で変化させると、

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & B_z & 0 \end{pmatrix} = -(F_{\nu\mu}) \tag{5.63}$$

であるから、Gaußの法則と変位電流の式 (磁場の回転が入っている式) をまとめると、

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 i^\mu \tag{5.64}$$

と書ける。残りの 2 式は

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{5.65}$$

で表される。

あとがき

(10.2.22) 版　……最後まで終了。

- ■ 最後までおつきあいいただきありがとうございました！
- ■ 誤字脱字等ありましたら下記アドレスまでご一報ください。(議論の仕方が間違っている場合は先生に訊いてください。)

  mail：manabu.takahashi0130@hotmail.co.jp

  と書いても NO レスポンス from エニワン．BUT ミスタイプの地雷原。気付いたミスは訂正したつもりですが、まだ間違いがあるかもしれません。気付いたら教えてください。
  匿名でいいので上記アドレスにお願いしますね～(公開処刑 gkbr
- ■ TeX はあらかた終わった。さあ、麻雀をはじめようじゃないか。

テストがんばりましょうねねね !!