二次元イジングモデル

二次元平面（XY 平面）に配置された上下の二方向（Z 正方向、負方向）を向くことねできるスピンのモデル (二次元 Ising モデル) を考える。全部で N 個のスピンがあると考える。とりあえず、正方格子の上に各スピンが並んでいるとする。

磁場が Z 正方向にかかっているとすると $h>0, J>0$ としてこのときハミルトニアンを

$$H = -J\sum_{\langle i,j\rangle} S_i S_j - h\sum_{i=1}^{N} S_i \tag{1}$$

で表わされる。

S_i は上向きならば 1、下向きならば-1 の値をとる。ここで $\langle i,j\rangle$ による $\sum$ とは、隣り合うスピンの積の和を表している。

第一項は隣り合うスピンの符号（向き）が同じであれば、エネルギーは低くなること第二項はスピンの符号が正（上向き）であれば、エネルギーが低くなることを表している。第一項は交換相互作用と呼ばれるもので、第二項はスピンと磁場の相互作用である。それぞれの相互作用についてはくわしくは触れないことにします。

ここで系が温度 T の熱浴と接していて温度が保たれているとき、ある配置 s が実現する確率は、そのときのハミルトニアンの値を H_s としてやれば、

$$P(s) = e^{-\beta H_s} / \sum_{\text{全配置 } i} e^{-\beta H_i} = e^{-\beta H_s}/Z \tag{2}$$

Z は分配関数である。配置の名前を i とした。ヘルムホルツの自由エネルギーは、

$$F = -k_B T \log Z \tag{3}$$

となる。ある状態 s に対する、スピンの平均値 m_s は、

$$m_s = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i \tag{4}$$

であるが、温度 T におけるスピンの熱期待値は（熱期待値は $\langle\rangle$ で表す）

$$\langle m\rangle = \sum_{\text{全配置 } s} m_s P(s) \tag{5}$$

であらわされる。

外部磁場のないとき（h=0)、ある温度以上では m=0 であるが、ある温度以下では、m が 0 でない値を持つようになる。これは強磁性体がある温度（キュリー点）では自発的には磁化を持たない常磁性体として振る舞い、それ以下の温度では自発的に磁化を持つ強磁性体として振舞うようになることと対応している。

今回は内部の磁化の様子をガーネットの磁区構造を見るという形で観察する。磁区構造は磁性体内部のスピンの並び方が場所によって上向きであったり下向きであったりするためにその境目ができるが、そういった仕切りができている構造のことである。