平成22年度 解析数理工学講義ノート

工学部計数工学科 ap2011

2011/4/1

目 次

第 I 部
Lebesgue 積分

1　Lebesgue 積分の必要性とその導入

1.1　Riemann 積分

1.1.1　Riemann 積分の定義

Riemann 積分は実数 $\mathcal{R}$ 上の一次元有界閉区間 $[a, b]$，関数 $f : [a, b] \to \mathcal{R}$(有界な関数) に対して

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表現される．また Riemann 和は $[a, b]$ の分割を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ として

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$$

で表現される．

定義 1.1 (Riemann 積分の定義)

f が Riemann 積分可能 (Riemann 可積分であるとも言う) であるとは

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq m} (x_i - x_{i-1}) \to 0$$

のとき ξ_i の選び方によらず

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \to I \text{ (一定値)}$$

となることを意味する．

定理 1.1 (Darboux の上積分・下積分)

$\overline{f}_i, \underline{f}_i$ を

$$\overline{f}_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \underline{f}_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

とおき,

$$\overline{s}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{k} \overline{f}_i(x_i - x_{i-1}), \quad \underline{s}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{k} \underline{f}_i(x_i - x_{i-1})$$

と定義する．ただし Δ は分割の仕方を意味する．このとき

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \overline{s}(f, \Delta) = \overline{s}, \quad \lim_{|\Delta| \to 0} \underline{s}(f, \Delta) = \underline{s}$$

が存在する．これらを Darboux の上積分・下積分という．

実は

$$\overline{s} = \underline{s}$$

となることは f が区間 $[a,b]$ 上で Riemann 積分可能であることと同値である．

定理 1.2 (Riemann 積分)

f が Riemann 積分可能であることと，任意の正数 ε に対してある正数 δ が存在して

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

が成り立つことは同値である．

[証明] まず f が Riemann 積分可能であるとき定理 1.1 より $\overline{s} = \underline{s}$ であるから

$$\overline{s} = \underline{s} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

が成り立つ．また $\overline{s} = \underline{s}$ のとき $\overline{s} = \underline{s} = s$ とおくと

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \overline{s}(f,\Delta) = s, \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{s}(f,\Delta) = s$$

であるから，任意の正数 ε に対してある正数 δ_1, δ_2 が存在して

$$|\Delta| < \min(\delta_1,\delta_2) \Rightarrow |\overline{s}(f,\Delta) - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\underline{s}(f,\Delta) - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．従って $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ とすれば

$$\begin{aligned}
|\Delta| < \delta \quad \Rightarrow \quad & |\overline{s}(f,\Delta) - \underline{s}(f,\Delta)| \\
\leq \quad & |\overline{s}(f,\Delta) - s| + |\underline{s}(f,\Delta) - s| \\
\leq \quad & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

以上より定理 1.2 が証明された．

例 1.1 有界閉区間上における連続関数は Riemann 可積分である．

[証明] I を有界閉区間，f を連続関数とする．$\mathcal{R}$ 上の任意の有界閉区間はコンパクトであるから，連続関数 f は I 上で一様連続である．任意の正数 ε に対して I の分割 $\Delta = I_j; j = 1,2,\cdots,m$ を

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|I|} \quad (x, y \in I_j)$$

であるように十分細かく分割できて，

$$\overline{f}_j - \underline{f}_j < \frac{\varepsilon}{|I|}$$

とできる．従って

$$\begin{aligned}
\overline{s}(f,\Delta) - \underline{s}(f,\Delta) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{m}(\overline{f}_j - \underline{f}_j)|I_j| \\
&\leq \quad \frac{\varepsilon}{|I|}\sum_{j=1}^{m}|I_j| = \varepsilon
\end{aligned}$$

ε は任意の正数であったから Darboux の上積分と下積分が一致する．つまり f は I 上 Riemann 可積分である．

例 1.2 有限個の不連続点をもつ区分的連続関数は Riemann 可積分である．

[証明] 不連続点を $d_1, d_2, \cdots, d_N$ とする．分割としては $d_i \in (x_{i-1}, x_i)$ を満足し，かつ

$$|x_i - x_{i-1}| < \frac{\varepsilon}{2MN} \cdot \frac{1}{2}$$

を満足するものとする．ただし $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ とする．これが任意の正数 ε に対して可能であることは，実数上の開区間をいくらでも小さく取れることより自明である．

さて，このとき

$$\overline{f}_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad \underline{f}_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

とおくと $-M \leq f(x) \leq M$ であるから

$$(\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_i - x_{i-1}) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2MN} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{2N}$$

従って

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2N} \cdot N = \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．また不連続点を含まない区間は全て有界閉区間でありかつその区間上で f は連続関数であるから定理 1.2，例 1.1 より

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つから有界閉区間 $[a,b]$ 上で

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

が成り立つ．従って定理 1.2 より Riemann 積分可能であることが示された．

例 1.3 $\mathcal{R}$ 上の単調関数 f の不連続点は高々可算個である[1]．区間 $[a,b]$ 上の単調増加関数は Riemann 積分可能である．

実は Riemann 積分可能であるための必要十分条件は”ほとんどすべての点”で連続であることが後に示される．”ほとんどすべての点”でというのも後に定義される．

例 1.4 $\mathcal{Q}$(有理数) の特性関数 (指示関数)$\chi_{\mathcal{Q}}$ はいかなる有界閉区間上 $[a,b]$ でも Riemann 積分可能ではない．ただし

$$\chi_{\mathcal{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathcal{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathcal{Q}) \end{cases}$$

[1] 可算無限とは自然数と一対一対応できる，つまり順序を付けて数えることのできる無限のことを指す．一方そうできない無限を非可算無限という．詳細は実解析入門 (猪狩惺)p5-p7，ルベーグ積分入門 (伊藤清三)p8-p10，解析入門 I(杉浦光夫)p397-p398 参照

[証明] 任意の内点をもつ区間 (一点のみからなる区間ではない)I_j において有理数と無理数を含む[2] から，この区間上で $\sup \chi_{\mathcal{Q}} = 1, \inf \chi_{\mathcal{Q}} = 0$ であるから任意の分割 Δ に対し

$$\overline{s}(\chi_{\mathcal{Q}}, \Delta) = b - a, \quad \underline{s}(\chi_{\mathcal{Q}}, \Delta) = 0$$

である．従って Darboux 上積分と下積分が一致しないので Riemann 可積分ではない.

1.1.2 Riemann 積分における極限と積分の交換

Riemann 積分においては”厳しい条件下”でしか極限と積分の交換が許されない.

定理 1.3 (Riemann 積分における極限と積分の交換可能性)

関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$($\mathcal{N}$ は自然数の集合とする) は有界な Riemann 可積分関数列とする．関数列が f に一様収束するとき極限と積分が交換可能で

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ.

例 1.5 一様収束しないが極限と積分が交換可能である例

次の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ の例を考える.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0,\ \frac{2}{n} < x) \\ nx & (0 \le x \le \frac{1}{n}) \\ 2 - nx & (\frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}) \end{cases}$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ であるから

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

である．また

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

となる．従って

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

が成り立つ．ところが

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

であるから関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ は $f(x)(=0)$ に一様収束しない．この例から一様収束しない関数列のうち極限と積分が交換可能なものがあることが分かる.

[2] 有理数の稠密性より.

定理 1.4 (Arzelà **の定理**)

関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ は有界な Riemann 可積分関数列とする．f を $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ の各点収束先の関数で Riemann 可積分とし，全ての整数 n に対してある定数 M が存在し $|f_n| < M$ を満足するとする．このとき極限と積分が交換可能であり

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ．

この定理では「関数列の一様収束」を条件としていない．先の例 1.5 ではこの定理より極限と積分が交換可能であることが保証されている．

次に「Riemann 可積分」という条件について考える．例 1.4 において有理数は可算集合で，無理数は非可算集合であり非可算無限のほうが可算無限より (濃度が) 大きいことを考えば

$$\int_a^b \chi_{\mathcal{Q}}(x)dx = 0 \quad (\star)$$

であると期待される．何故ならば非可算集合上，つまり”ほとんど”の点で $\chi_{\mathcal{Q}}(x)$ は 0 であるからである．(可算無限も無限であるからこの関数はほとんど 1 であるといえる．従って積分値は 1 であるかもしれない，と感じるかもしれないが，同じ無限でも非可算無限の方が可算無限よりもはるかに大きい．)

しかし既に証明したがこの関数は Darboux の上積分と下積分の値が一致しないので Riemann 積分可能ではない．つまり感覚的には $(\star)$ の積分は正しいように思えるが，Riemann 積分ではこれを示せない．次節で導入する Lebesgue 積分を用いれば $(\star)$ が成り立つことを証明できる．より多様な関数の積分を可能にする Lebesgue 積分を導入しよう．

1.2 Lebesgue 積分の導入

1.2.1 Lebesgue 積分における極限と積分の交換

この節では Lebesgue 積分を導入する．前節の最後でも取り上げたが Lebesgue 積分でまず言いたいことは，Lebesgue 可積分関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ が”ほとんど至る所”である関数 f に収束するならば，極限と積分が交換可能で

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ，という感覚的には当たり前のことである．ただし Riemann 積分ではこの当たり前のことが示せない (例 1.4)．Lebesgue 積分を学ぶ目的の一つはより多様な関数の積分を可能にすることである．

定理 1.5 (Lebesgue 積分)

$[a, b]$ を $\mathcal{R}$ 上の有界閉区間，$f : [a, b] \to \mathcal{R}$ を有界な関数 ($A < f(x) < B$ (A, B は定数)) とする．**y 軸**上の分割を Δ とする．ここで

$$\underline{S}^{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i),\ \ \overline{S}^{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i),\ \ E_i = \{x | y_{i-1} \le f(x) \le y_i\}$$

と定義する．ただし $m(E_i)$[3]は区間の長さを表わす．このとき

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \underline{S}^{\Delta} = \lim_{|\Delta| \to 0} \overline{S}^{\Delta} \quad (\text{一定値})$$

が成り立つ．(※ Riemann 積分における Darboux の定理に似ているが，あれは上積分と下積分の存在を述べた定理であって，それらが等しいことを述べている訳ではない．それらが一致すれば Riemann 積分可能であった．)

[証明] まず f が有界であるから

$$\sup_{\Delta} = \underline{S},\quad \inf_{\Delta} = \overline{S}$$

が存在する．また任意の分割 Δ_1，Δ_2 に対して

$$\underline{S}^{\Delta_1} \le \overline{S}^{\Delta_2}$$

が成り立ち，分割を細かくすると $\underline{S}^{\Delta}$は単調に増加し,$\underline{S}^{\Delta}$は単調に減少する．以上より任意の分割 Δ_1，Δ_2に対し

$$\underline{S}^{\Delta_1} \le \underline{S} \le \overline{S} \le \overline{S}^{\Delta_2}$$

が成り立つ．ここで $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ とすると

$$\begin{aligned} \overline{S}^{\Delta} - \underline{S}^{\Delta} &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) m(E_i) \\ &\le |\Delta| \sum_{i=1}^{n} m(E_i) = |\Delta|(b - a) \to 0 \ (|\Delta| \to 0) \end{aligned}$$

従って定理 1.6 は示された.

1.2.2 測度と可測の概念

定理 1.5 の証明で一つ問題点があるとすれば，それは全ての集合 E_i の大きさが m で測れなければならないということである．つまり $m(E_i)$ という値が存在しなければならない．そして次の事実が知られている．

[3]区間の長さは従来の”長さ”の意味である．つまり閉区間 $[a, b]$ の長さは $m([b - a]) = b - a$ でありこれは”Lebesgue 測度”と呼ばれる．Lebesgue 測度は通常の体積 (一次元なら長さ，二次元なら面積) を”測る”ものさしと考えられる．

$\mathcal{R}$ 上の全ての集合 A に対して定義された以下の性質を持つ (集合) 関数 m は存在しない.

$$\begin{cases} \text{(i) } m(\phi)=0,\ m([0,1])=1 \\ \text{(ii)) } A_1=A_2 \Rightarrow m(A_1)=m(A_2) \\ \text{(iii) } \{A_i\}_{i=1}^n,\ A_i\cap A_j=\phi \Rightarrow m(\sum_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n m(A_i) \end{cases}$$

そこで大きさ (体積) を測れる集合”可測集合”と”可測関数”というものを定義する.

定義 1.2 (可測集合と可測関数の定義)

集合 E がすべての $A\in\mathcal{P}(R^n)$ ($\mathcal{P}(\mathcal{R}^n)$ は R^n の冪集合[4]) に対して

$$m(A)=m(A\cap E)+m(A\cap E^c)\quad (E^c \text{は } E \text{ の補集合})$$

を満足するとき，E は m-**可測 (m-measurable)** または単に**可測集合**という[5]．またこの条件を Carathèodory の条件という.

また関数 f が

$$\forall a\le\forall b \text{ に対し } \{x|a\le f(x)\le b\} \text{ が } m-\text{可測集合}$$

となるとき，関数 f は m-**可測関数**または単に**可測関数**という.

定理 1.5’

f が m-可測関数ならば

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}^{\Delta}=\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}^{\Delta}\quad (\text{一定値})$$

が成り立つ.

例 1.5 「$A:[a,b]$ に含まれる m-可測集合である」⇔「A の定義 (指示) 関数$\chi_A(x)$ が m-可測関数」

$[a,b]$ に 1 を含むかどうかで定義にかえって考えれば明らか.

定義 1.3 (Lebesgue 積分)

f を m-可測関数とする．このとき (Lebesgue) 積分を

$$(\mathcal{L})\int_a^b f(x)dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}^{\Delta}\ (=\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}^{\Delta})$$

と定義する.

※ Riemann 積分と区別するために積分記号の前に $(\mathcal{L})$ を表記した．Riemann 積分を特に意味するときは $(\mathcal{R})$ を表記する．以下も同様とする.

[4] R^n の部分集合の全体.

[5] m が特に Lebesgue 測度のとき Lebesgue 可測という.

例 1.6 A が m-可測ならば

$$(\mathcal{L})\int_a^b \chi_A(x)dx = m(A)$$

一般的には測度を導入してから Lebesgue 積分の導入に入るが，この例からも分かるように測度と積分は同じ意味を持つ．従って Lebesgue 積分の定義を先に導入し，その後測度を定義する方法も存在する．リースの流儀と呼ばれる．(ルベーグ積分 [洲之内治男] 参照．)

定理 1.6(Lebesgue の有界収束定理)

関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ は以下の条件を満たすものとする．

(i) f_n: Lebesgue 可測関数かつ f に各点収束する
(ii) $|f_n| < M$ (一様有界)

このとき f は可積分で，

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n dx = \int f dx$$

を満足する．

この定理が成り立つために要求されることは

$$\{A_n\}_{n\in\mathcal{N}},\ A_i\cap A_j=\phi,\ A_n\text{は } m\text{−可測} \Rightarrow m(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$$

この性質を m の**完全加法性**という．ただし以下の性質 (**有限加法性**)

$$\{A_n\}_{n\in\mathcal{N}},\ A_i\cap A_j=\phi,\ A_n\text{は } m\text{−可測} \Rightarrow m(\sum_{n=1}^{N}A_n)=\sum_{n=1}^{N}m(A_n)$$

を認める (積分の線形性)．
何故これが要求されるかといえば，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(x)=f(x)$$

とする．従って $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(x)$ とすれば

$$m(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\int\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(x)dx=\int\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int\chi_{A_i}(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx$$

であるから測度の完全加法性とは

$$\int\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int\chi_{A_i}(x)dx$$

を意味する．つまり測度の完全加法性が成り立たなければ，定理 1.6 は成り立たない ($|\chi|\le 1$ であるから定理 1.6 で $M=1$ としたとき)．次章では測度の性質について考察する．

(余談)　測度の有限加法性と完全加法性はどのような意味を持つのであろうか．測度を集合の「体積」（一次元なら長さ，二次元なら面積）ととらえると，可測集合 E とは「任意の集合 A を集合 E で二つ ($A \cap E$ と $A \cap E^c$) に分けたとき，集合 A の体積が分割した集合 ($A \cap E$ と $A \cap E^c$) の体積の和に等しい」ということである．特に有限加法性とは「ある物体 (集合) を有限個に分割したとき，分割したものの体積 (測度) の和は分割する前の物体の体積に等しい」という意味である．完全加法性はそれを拡張して，可算無限個に分けたときも分割したものの体積の和は元の物体の体積に等しいということである．

また，確率の話に置き換えて考えてみると分かりやすいかもしれない．今まで習ってきた確率は例えば,「ある事象 A があって，A が起こる確率は $P(A) = 1/2$」といったことを習ってきた．実は事象 (集合) に対して確率を与える P も集合関数の一種であり，**確率測度**という．確率測度 P も測度であるから前述の可算加法性をみたす．つまり

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (A_i \cap A_j = \phi(i \neq j))$$

を満たす．具体例をあげれば，$A_i = \{$ コインを投げ続けて i 回目で初めて表が出る $\}$ という集合について考えてみる．当然

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{4}, \cdots, P(A_n) = \frac{1}{2^n}, \cdots$$

である．そしてこれまた当然ながら

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

である．無限回まで投げ続けたらいつか必ず表は一回出るのであるから当然である．また

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \quad (\Omega\text{全事象})$$

であるから

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\Omega) = 1$$

従って確かに

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (= 1)$$

が成り立っている．(確率論の詳細は確率論 [伊藤清] 参照)

2　Lebesgue 測度

2.1　面積の概念

2.1.1　従来の面積の定義

$|A|$ を集合 $A(\subset \mathcal{R}^d)$ の体積とする．つまり $A = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_d, b_d)$ とすると

$$|A| = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

である．これは今までの体積と同じである．

A を覆う $\mathcal{R}^d$ の**有限個**の右半開区間 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ をとり，

$$m_J{}^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{n} |I_j|; A \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j\}$$

を A の **Jordan 外測度**という．また A に含まれる互いに交わらない**有限個**の区間列 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 考え

$$m_{J*}(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |I_j|; A \supset \bigcup_{j=1}^{n} I_j\}$$

を A の **Jordan 内測度**という．

$$m_J{}^*(A) = m_{J*}(A)$$

であるとき，A は **Jordan 可測**であるという．またこの共通の値を A の **Jordan 測度**といい $m_J(A)$ で表わす．

例 2.1 　$A = \{[0,1]$ 上の有理数 $\}$ は Jordan 可測ではない．実際 $A_i = \{i$ 番目に小さい有理数 $r_i\}$ とすれば

$$A_i = \{r_i\} \to |A_i| = 0$$

であるから

$$m_{J*}(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |A_j| = 0$$

となる．一方 J 有理数が $[0,1]$ 上で稠密であるから，これを**有限個**の半開区間で覆うと

$$[0,1] \subset \sum_{j=1}^{n} |I_j|$$

が成り立つので両辺の下限をとって Jordan 外測度は

$$m_J{}^*(A) = 1$$

となる．以上より

$$m_J{}^*(A) \neq m_{J*}(A)$$

従って A は Jordan 可測ではない．

2.1.2 新しい面積 (Lebesgue 測度) の定義

定義 2.1 (Lebesgue 測度)

A($\subset \mathcal{R}^d$) を覆う $\mathcal{R}^d$ の**可算無限個**の右半開区間 $I_1, I_2, \cdots$ をとり，

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\}$$

を A の **Lebesgue 外測度**という．また A に含まれる互いに交わらない**可算無限個**の区間列 $I_1, I_2, \cdots$ 考え

$$m_*(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|; A \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\}$$

を A の **Lebesgue 内測度**[6]という．

$$m^*(A) = m_*(A)$$

であるとき，A は **Lebesgue 可測**であるという．またこの共通の値を A の **Lebesgue 測度**といい $m(A)$ で表わす．

例 2.1'　$A = \{[0,1]$ 上の有理数$\}$ は Lebesgue 可測である．各記号は例 2.1 を踏襲する．まず Jorodan 内測度と比較して Lebesgue 内測度が

$$m_*(A) = 0$$

であることは明らかである．異なる点は Lebesuge 外測度である．何故ならば Jordan 外測度と違い**可算無限個の被覆をとることが許されている**からである．具体的には任意の正数 ε に対して右半開区間

$$r_i \in I_j = [r_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\ ,\ r_i + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}})\quad (j = 1, 2, \cdots)$$

を考える．これは

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

を満足する．このとき $|A_i| = \varepsilon/2^j$ であるから

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$$

よって

$$m^*(A) = \inf_{covering} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq \varepsilon$$

ε は任意の正数であったから

$$m^*(A) = 0$$

である．従って

$$m^*(A) = m_*(A)\quad (= 0)$$

であるから A は Lebesgue 可測である．

(補足)　Jordan 測度と Lebesgue 測度の違いを補足する (例 2.1,2.1' では同じ集合でも Jordan 可測ではないが Lebesgue 可測であった．違いが分かれば読みとばして良い)．まずもう一度強調すると**可算無限個の被覆をとることが許されている** ことが違う．例 2.1' で

$$r_j \in I_j = [r_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\ ,\ r_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}})\quad (j = 1, 2, \cdots),\quad A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

[6] $m_*(A) = |A| - m^*(A)$ と定義するのが最も良く行われる．ここでは Jordan 測度との対応をとるためにこのように定義した．

という被覆が取れた．Jordan 測度で同じ被覆をとると

$$A \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

となって A を被覆できない．これは有限個の右半開区間で同様に被覆しようとすると被覆できない有理数が存在してしまうからである．可算無限個で被覆しようとすれば，有理数の集合の濃度が可算無限であるから被覆できる．

また有限個で $[0,1]$ 上の有理数の集合を被覆すると必ず

$$[0,1] \subset \sum_{j=1}^{n} |I_j|$$

を満たす．I_j が右半開区間であるから背理法を用いれば上式が成立することが分かる．

定理 2.1 (外測度の性質)

1) 任意の $\mathcal{R}^d$に対して $m^*(A)$ が定義され $0 \leq m^*(A) \leq \infty$, $m^*(\phi) = 0$ [7]

2) $A_i \subset A_j \Rightarrow m^*(A_i) \leq m^*(A_j)$

3)$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$として $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

[証明] 1),2) は明らか．3) のみ証明する．任意の正数 ε に対して各 A_i につき

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^{(i)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^{(i)}| < m^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

とできる ($m^*(A)$ は $\sum |I_j^{(i)}|$ の下限であった)．このとき

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i$$

であり

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^{(i)}| &< \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

従って両辺を被覆に対して下限をとれば

$$m^*(A) < \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) + \varepsilon$$

でるから，ε は任意の正数なので

$$m^*(A) < \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$$

[7] もしくは A が有界ならば $m^*(A) < \infty$．同値であることは各自で証明してみよ．

が示された．

例 2.2 $P=\{x|x:[0,1]$ 上への無理数 $\}$ とする．$Q=\{x|x:[0,1]$ 上への有理数 $\}$ とすれば例 2.1' より $m^*(Q)=0$ であるから

$$1=m^*([0,1])=m^*(A\cup B)\leq m^*(A)+m^*(B)=m^*(B)\leq m^*([0,1])=1$$

従って

$$m^*(P)=1$$

となる．

定理 2.2 (内測度の性質)

1) 任意の $\mathcal{R}^d$ に対して $m_*(A)$ が定義され $0\leq m_*(A)\leq\infty$, $m_(\phi)=0$ [8]

2) $A_i\subset A_j\Rightarrow m_*(A_i)\leq m_*(A_j)$

3) $m_*(A)\leq m^*(A)$

[証明] 1) は明らか．2) は A_i,A_j が有界ならば $A_i,A_j\subset I$ となる半開区間 I をとると

$$m_*(A_i)=|I|-m^*(A_i^c\cap I)$$
$$m_*(A_j)=|I|-m^*(A_j^c\cap I)$$

であり $A_j^c\cap I\subset A_i^c\cap I$ なので外測度の単調性より

$$m^*(A_j^c\cap I)\leq m^*(A_i^c\cap I)$$

が成り立つ．従って

$$m_*(A_i)\leq m_*(A_j)$$

となる．有界でないときは自明である．
　つぎに 3) について証明する．A が有界であるとき A を含む半開区間 I をとると

$$m_*(A)=|I|-m^*(A^c\cap I)$$

一方 $I=A\cup(A^c\cap I)$ でるから外測度の性質 3)(外測度の劣加法性) より

$$|I|=m^*(I)\leq m^*(A)+m^*(A^c\cap I)$$

が成り立つ．よって

$$m_*(A)\leq m^*(A)$$

が示された．A が有界でないときは自明.

例 2.3 例 2.2 の記号を踏襲すれば

$$m_*(P)=1,\ m^*(Q)=0$$

[8] もしくは A が有界ならば $m_*(A)<\infty$．同値であることは各自で証明してみよ.

実際内測度の性質 1)，3) より

$$0 \leq m_*(Q) \leq m^*(Q) = 0$$

である．もしくは

$$\begin{aligned} m_*(Q) &= |[0,1]| - m^*(A^c \cap [0,1]) \\ &= 1 - m^*(B) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

である．P についても同様である．

測度論の話が続いたのでここで少し Lebesgue 積分について触れる．本来ならばこの後も測度論の話が (長々と) 続き，可測関数の話をしたあとで初めて積分が定義される．あくまでも Lebesgue 積分というのは多様な関数の積分を定義したいというのが本来の目的である．

さてここで 1.1(P6) の最後で扱ったディリクレ関数の積分

$$\int_0^1 \chi_{\mathcal{Q}}(x)dx$$

について考える (a=0,b=1).

$$m^*(Q) = m_*(Q)\ (= 0)$$

が成り立つので Q は Lebesgue 可測であり，$\chi_{\mathcal{Q}}$ は可測関数である．従って例 1.6(P9) を参照すると

$$\int_0^1 \chi_{\mathcal{Q}}(x)dx = m(Q)$$

ただし Q は例 2.2，例 2.3 と同じ意味である．よって

$$\int_0^1 \chi_{\mathcal{Q}}(x)dx = m(Q) = 0$$

が示される．これは Riemann 積分では示すことができなかった．可測という概念を導入したことでより多様な関数の積分が定義されることがこの例から分かる．ちなみに

$$\int_0^1 \chi_{\mathcal{P}}(x)dx = m(P) = 1\ \ (\mathcal{P}\text{ は無理数の集合})$$

である．

例 2.4 $\mathcal{R}^d$ 上の半開区間，開区間，閉区間は Lebesgue 可測である．

例 2.5 Lebesgue 可測でない集合 (非可測集合) が存在する．

これは**選択公理 (axiom of choice)**[9]による．Banach-Tarski paradox とよばれるものである．くわしい内容には触れないが，球を 3 次元空間内で，有限個の部分に分割し，それらを回転・平行移動操作のみを使ってうまく組み替えることで，元の球と同じ半径の球を 2 つ作ることができるという定

[9]集合と位相の本を適宜参照.

理 (らしい)．分割したものは Lebesgue 可測ではない．この' 体積' の概念では蜜柑一個を分割して太陽の大きさのものを作れる．選択公理を認めればこれが数学的に正しい[10]．

また非可測集合の例として Vitali が提示した構成方法がある．いずれにしても可測でない集合を見つけるのは難しい．

2.2 可測集合・測度の性質

定理 2.3(Lebesgue 可測集合の性質) $\mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$ は $\mathcal{R}^d$ 上の可測集合の全体とする．

(L1) $\mathcal{R}^d \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$, $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$
(L2) $A \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d) \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$
(L3) $A_i \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)\ (i = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$

(L2)，(L3) の性質から

$$A_i \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d) \Rightarrow {A_i}^c \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$$

なので

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} {A_i}^c \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$$

である．従って

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} {A_i}^c\right)^c \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$$

となる．de Morgan の法則より

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$$

に注意．一般に集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が

1) $X \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3) $A_i \in \mathcal{F}\ (i = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

を満たすとき，$\mathcal{F}$ を**完全加法族 (σ -加法族，σ -algebra)** という．$\mathcal{R}^d$ 上の Lebesgue 可測集合の全体は完全加法族である．

ここで少し可測集合の性質の意味について考えてみる．具体性を持たせるために測度 m を確率測度 P としよう．確率測度 P に対してある集合 A が可測集合であるとは，A が P で測れる，つまり $P(A)$ という確率が定義できる，という意味である．これを踏まえて，まず条件 (L1) は空集合 ϕ と全事象 Ω は確率を持つということを意味する．当然

$$P(\phi) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

である．つぎに条件 (L2) はある集合 (事象)A の確率が定義できるとき，その補集合 (余事象) の確率が定義できる，という意味である．当然

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

[10]選択公理を認めない立場をとる数学者もいる．しかし選択公理を認めないと今日の数学の多くの部分が否定されてしまう．選択公理を否定すると例えばある集合から点列を選ぶ (抜き出す) ことはできない．選択公理は正しいとする立場が一般的である．

である．条件 (L3) は可算無限個の事象の確率が定義できるとき，そのうち少なくともどれか一つが起きる事象 ($\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$) の確率が定義できる，という意味である．どれも自然な要請である．

定理 2.4(Lebesgue 測度の性質) m(Lebesgue 測度) は以下の性質をもつ．

(M1) $m(\phi) = 0$
(M2) $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$ かつ $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$ (測度の単調性)
(M3) $A \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d) \Rightarrow$ 任意の $B \in \mathcal{R}^d$に対して $m(B) = m(A \cap B) + m(B - A)$
(M4) $A_i \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d)$ $(i = 1, 2, \cdots) \Rightarrow m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ (測度の劣加法性)

とくに (M4) の条件において

$$\text{任意の } i \neq j \text{ に対して } A_i \cap A_j = \phi \text{ならば } m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \quad \text{(測度の完全加法性)}$$

が成り立つ．

定理 2.5 $\mathcal{R}^d$ 上の任意の開集合，閉集合は可測である．

定理 2.5 A が可測集合ならば，任意の集合 $X \subset \mathcal{R}^d$ に対して

$$m^*(X) = m^*(A \cup X) + m^*(A \cap X)$$

が成り立つ．

一般的な外測度

集合 X の冪集合 2^X の上に定義された実数値非負関数 $\mu^* : 2^X \to \mathcal{R} \cup \{+\infty\}$ が次の条件を満たすとき (Carathèodory の) 外測度という．

1) $0 \leq \mu^*(A), \mu^*(\phi) = 0$

2) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3) $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

この μ^* に対して

$$A \in \mathcal{M}(\mathcal{R}^d) \Leftrightarrow \forall E \subset X \text{ に対して } \mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

が成り立つ．そして $\mu(A) = \mu^*(A)$ として A の測度を定義する．この定義のもとで可測集合族，測度に対して定理 2.3 と 2.4 が成り立つ．

3 可測関数

3.1 可測関数の定義

積分を定義するためには $E_i = \{x | y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$ が可測でなければならない．

定義 3.1(可測関数) E を関数 f の定義域とする．このとき

$$\text{任意の実数 } a \text{ に対し } \{x \in E | f(x) > a\} \text{ が可測集合}$$

であるとき，f を**可測関数**と定義する．

定理 3.1 f が可測関数ならば任意の実数の α, β に対して以下は同値である．ただし $E(f > \alpha) = E \cap \{x | f(x > \alpha)\}(E)$ は f の定義域 とする．

$$\begin{cases} 1) \ E(f > \alpha) \text{ が可測集合} \\ 2) \ E(f \geq \alpha) \text{ が可測集合} \\ 3) \ E(f \leq \alpha) \text{ が可測集合} \\ 4) \ E(f < \alpha) \text{ が可測集合} \\ 5) \ E(f = \alpha) \text{ が可測集合} \end{cases}$$

これは可測集合の性質 (σ 加法族) 等を考えれば示せる．

定理 3.2 f, g が可測関数ならば $E(f > g), E(f \geq g), E(f = g)$ は可測集合である．

$E(f > g) = \bigcup_{r \in \mathcal{Q}} E(f > r) \cap E(g < r)$ と考えればよい．r を有理数としたのは可算個の交わりについて考えるためである．実数の濃度は非可算であることに注意．

3.2 可測関数の性質

定理 3.3(可測関数の性質)

1) f が可測 $\Rightarrow \forall p > 0$ に対して $|f|^p$は可測
2) f, g が有限値をとる可測関数 $\Rightarrow af + bg(a, b \in \mathcal{R}), fg, f/g(g \neq 0)$ は全て可測

f/g が可測であることだけ示しておく．

$$E(f/g > a) = \big(E(g > 0) \cap E(f - ag > 0)\big) \cup \big(E(g < 0) \cap E(f - ag < 0)\big)$$

とすれば定理 3.2 より f/g は可測である．

例 3.1 E_i $(i - 1, 2, \cdots)$ が可測集合で $E_i \cap E_j = \phi(i \neq j)$ とする．このとき

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \ (c_i \in \mathcal{R})$$

とする．特性関数は可測であることは明らかなので定理 3.3 より f は可測である．この f を単関数という．単関数は可測である．

例 3.2 連続関数は可測である．

実際 f が連続ならば開集合の f による逆像は開集合であり[11]，開集合は可測集合であるから f は連続ならば可測である．

[11]一般の位相空間で成り立つ

定理 3.4(可測関数の性質) $f_n(n=1,2,\cdots)$ が可測ならば以下は全て可測である.

1) $\max\{f_1,f_2\}, \min\{f_1,f_2\}$
2) $\sup_{n\geq j} f_n, \inf_{n\geq j} f_n$
3) $\limsup_{n\to\infty} f_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$
4) $\lim_{n\to\infty} f_n$ (存在すれば)

定義 3.2 命題 $P(x)$ がある測度 0 の集合 (**零集合**)N 以外の点 $x\in E$ で成り立つとき，すなわち

$$P(x)\ (x\in E-N)$$

であるとき,「命題 $P(x)$ は ”**ほとんど至るところ (almost everywhere)**[12] ”で成り立つ」といい,

$$P \text{ a.e. } x\in E$$

とかく.

定理 3.5 f は可測かつ $g=f$a.e. $(x\in E)$ ならば g も可測である.

定理 3.6 $\{f_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ は可測関数列とし，f_nが f にほとんど至るところで収束しているとする.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ a.e. } x\in E$$

このとき f は可測である.

例 3.3 $\chi_{\mathcal{Q}}(x)$ は可測である．$\chi_{\mathcal{Q}}(x)=0\ a.e.$ であり，零集合は可測であることより明らか.

例 3.4 f_n を連続関数とし，f_n は f にほとんど至るところで f に収束しているとする．このとき f は可測である．逆に (E が有界ならば)f を可測とするとき，ある連続関数列 f_n がとれて

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ a.e.}$$

が成り立つ.

4 Lebesgue 積分

4.1 Lebesgue 積分の定義

E を $\mathcal{R}$ 上の有界閉区間，$f:E\to\mathcal{R}$ を有界な可測関数 ($A<f(x)<B$ (A,B は定数)) とする．y 軸上の分割を Δ とする．ここで

$$\underline{S}^{\Delta}=\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}m(E_i),\ \ \overline{S}^{\Delta}=\sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i),\ \ E_i=\{x|y_{i-1}\leq f(x)\leq y_i\}$$

と定義する．ただし $m(E_i)$ は可測集合である.

[12] almost all x ともいう．また確率論では almost surely といい，a.s. と略す.

定理 4.1(Lebesgue 積分) 上記の記号を用いると

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}^{\Delta} = \lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}^{\Delta} \quad (\text{一定値})$$

が成り立つ．

定義 4.1 (Lebesgue 積分) 閉区間 E 上の有界可測関数の積分を

$$\int_E f dm = \lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}^{\Delta} \ (= \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}^{\Delta})$$

と定義する．有界可測関数は全て可積分である．

4.2 Lebesgue 積分の性質

ここで $f = g$ a.e. のとき $f \sim g$ という二項関係を考えるとこれはある同定義域 E の関数空間上の同値関係となる．反射率，対称率が成り立つのは自明であるから，推移律が成り立つことを示しておく．いま $f \sim g$ かつ $g \sim h$ であるとする．

$$f = g \text{ a.e. かつ } g = h \text{ a.e.}$$

である．つまりある零集合 $E_1(\subset E)$, $E_2(\subset E)$ があって

$$\begin{cases} f = g & (x \in E - E_1) \\ f \neq g & (x \in E_1) \end{cases} \begin{cases} g = h & (x \in E - E_2) \\ g \neq h & (x \in E_2) \end{cases}$$

が成り立っている．従って

$$\begin{cases} f = h & (x \in E' \supset (E - E_1 \cup E_2)) \\ f \neq h & (x \in E - E' \subset E_1 \cup E_2) \end{cases}$$

となる．

$$m(E - E') \leq m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2) = 0 + 0 = 0$$

なので $E - E'$ は零集合であるから

$$f \sim h$$

が成り立つ．よってこの二項関係は推移律を満足する．

定理 4.2(同値類による積分値の定義) f, g を有界可測関数とし $f \sim g$ とする．ただし二項関係は上記のものとする．このとき

$$\int_E f dm = \int_E g dm$$

が成り立つ．

[証明] $f \sim g$ であるから

$$\begin{cases} f = g & (x \in E - E') \\ f \neq g & (x \in E') \end{cases}$$

となる．ただし E' は零集合とする．このとき

$$\begin{aligned}
\int_E fdm &= \int_{E-E'} fdm + \int_{E'} fdm \\
&\leq \int_{E-E'} gdm + \big(\sup_{x\in E'} f\big)\int_{E'} dm \\
&\leq \int_E gdm - \int_{E'} gdm + \big(\sup_{x\in E'} f\big)m(E') \quad \big(\int_A dm = m(A)\big) \\
&\leq \int_E gdm - \big(\inf_{x\in E'} g\big)\int_{E'} dm + \big(\sup_{x\in E'} f\big)m(E') \\
&= \int_E gdm + \big(\sup_{x\in E'} f - \inf_{E'} g\big)m(E') \\
&= \int_E gdm \quad (E'\text{は零集合})
\end{aligned}$$

従って

$$f \sim g \Rightarrow \int_E fdm \leq \int_E gdm \quad (\star)$$

が成り立つ．ここで $\sim$ は同値関係であるから対称律より

$$f \sim g \Rightarrow g \sim f$$

である．よって $(\star)$ より

$$\int_E gdm \leq \int_E fdm$$

が成り立つ．以上より

$$\int_E fdm = \int_E gdm$$

となる．

この定理は二つの関数がほとんど至るところで等しいならば，積分値も等しくなるということを言っている．これは当たり前のことであるが，何を持って ”ほとんど至るところ ”とするかは結局零集合の概念によって与えられることが分かる．

例 4.1 $f = \chi_{\mathcal{Q}\cap[0,1]}$ (dirichlet 関数) は

$$f = 0 \text{ a.e.}$$

であるから定理 4.2 より

$$\int \chi_{\mathcal{Q}\cap[0,1]}\ dm = \int_0^1 \chi_{\mathcal{Q}}\ dm = \int_0^1 0\ dm = 0$$

定理 4.3

$$\int_E \alpha fdm = \alpha\int_E fdm$$

定理 4.4

$$E = \sum_{i=1}^n E_i \quad (E_i\text{: 可測}, E_i \cap E_j = \phi\ (i \neq j))$$

定理 4.5

$$\int_E f dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f dm$$

ただし $E = \sum_{i=1}^{n} E_i \quad (E_i$: 可測, $E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j))$ である.

定理 4.6

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f dm \leq \int_E g dm$$

系 4.7

$$\left| \int_E f dm \right| \leq \int_E |f| dm$$

定理 4.8

$$\int_E (f+g) dm = \int_E f dm + \int_E g dm$$

定理 4.9 E を零集合とし，f を有界可側関数とすれば

$$\int_E f dm = 0$$

となる.

[証明]

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_E f dm \right| &\leq \int_E |f| dm \\ &\leq \big(\sup_{x \in E} |f| \big) \int_E dm \\ &= \big(\sup_{x \in E} |f| \big) m(E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$\int_E f dm = 0$$

が成り立つ.

定理 4.10

$$\int_E f dm = 0 \text{ かつ } f \geq 0 \text{ a.e.} \Rightarrow f = 0 \text{ a.e.}$$

[証明] 方針としては $E' = \{x | f(x) \neq 0\}$ が零集合であることを示せばよい．$m(E') \neq 0$ として背理法で示す.

$$\int_E f dm = 0$$

より両辺の絶対値をとって

$$\left| \int_E f dm \right| = 0$$

従って

$$\begin{aligned} 0 &= \left|\int_E f dm\right| \\ &= \left|\int_{E'} f dm + \int_{E-E'} f dm\right| \\ &\geq \left|\int_{E'} f dm\right| - \left|\int_{E-E'} 0\ dm\right| \quad (|A+B| \geq |A| - |B|,\ E-E' \text{上では } f=0) \\ &= \left|\int_{E'} f dm\right| \end{aligned}$$

これと

$$\left|\int_{E'} f dm\right| \geq 0$$

より

$$\left|\int_{E'} f dm\right| = 0 \quad (\star)$$

となる．ここで

$$f \geq 0 \text{ a.e.}$$

より

$$\begin{cases} f > 0 & (x \in E' - E_1) \\ f < 0 & (x \in E_1) \end{cases}$$

とすると，E_1 は零集合である．従って $(\star)$ は

$$\begin{aligned} 0 &= \left|\int_{E'} f dm\right| \\ &\geq \int_{E'} f dm \\ &= \int_{E'-E_1} f dm + \int_{E_1} f dm \\ &= \int_{E'-E_1} f dm \quad (\text{定理 4.9 より零集合上の積分は } 0) \end{aligned}$$

となる．よって

$$\int_{E'-E_1} f dm = 0$$

となる．これは

$$f > 0 \text{ かつ } m(E-E') > 0 \Rightarrow \int_{E-E'} f dm > 0$$

であることに矛盾する．よって背理法より $E' - E_1$ は零集合であり，E_1 は零集合であることより

$$E' = (E' - E_1) + E_1$$

も零集合である．よって題意は示された．

定理 4.11(Lebesgue の有界収束定理) $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を可測集合 E 上 (ただし $m(E) < +\infty$) の可測関数とし，$f_n \to f$ (各点収束)，$|f_n| < M$ (一様有界) とする．このとき f は可測関数となり，

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm$$

が成り立つ.

定理 4.12(Riemann 積分と Lebesgue 積分の関係) 有界区間 $[a,b]$ で Riemann 積分可能な関数は Lebesgue 可測で両者の積分は等しい．つまり

$$(\mathcal{R})\int_a^b fdm \text{ が存在する } \Rightarrow (\mathcal{L})\int_a^b fdm \text{ が存在して } (\mathcal{R})\int_a^b fdm = (\mathcal{L})\int_a^b fdm$$

4.3 非有界可測関数・定義域測度無限の場合の Lebesgue 積分の定義

定義 4.2 (非有界可測関数の Lebesgue 積分の定義)

(1) $f \geq 0$ の場合
${}^M f = \min\{f, M\}$ とおくとき $\lim_{M\to\infty}\int_E {}^M fdm < +\infty$ ならばこの値を $\int_E fdm$ と表わし f の積分といい，f は可積分であるという.

(2) f が一般の場合
このとき $f^+ = \max\{f, 0\}$，$f^- = -\min\{f, 0\}$ とすると，$f = f^+ - f^-$ となる．$f^+ \geq 0$，$f^- \geq 0$ であるから (1) の場合で考えて f^+，f^- が可積分ならば f は可積分であるといい，積分を

$$\int_E fdm = \int_E f^+dm - \int_E f^-dm$$

と定義する.

定義 4.3 (定義域測度無限の Lebesgue 積分の定義)

(1) $f \geq 0$ の場合
$E_R = E \cap [R, R) \times [R, R) \times \cdots \times [R, R)$ とするとき

$$\lim_{R\to\infty}\int_{E_R} fdm$$

が存在するときこの値を $\int_E fdm$ と表わし f の積分といい，f は可積分であるという．(ただし，$\lim_{R\to\infty}\int_{E_R} fdm = +\infty$ のとき, $\int_E fdm = +\infty$ と書くこともある．)

(2) f が一般の場合
(1) の意味で f^+，f^- が可積分のとき，f は可積分といい，その積分を

$$\int_E fdm = \int_E f^+dm - \int_E f^-dm$$

で定義する.

(※) f が可積分ならば $|f|$ は可積分である.

例 4.2(広義 Riemann 積分可能だが Lebesgue 積分不可能な例)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

について考える．これは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{s_1 \to \infty,\ s_2 \to \infty} (\mathcal{R}) \int_{-s_2}^{s_1} \frac{\sin x}{x} dx$$

とすれば広義 Riemann 積分可能である．しかし

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{+} dx = +\infty$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-} dx = +\infty$$

なので Lebesgue 積分不可能である．

定理 4.3 から定理 4.12 までは以上の場合も成り立つ．

定理 4.13 f が可積分ならば

$$m(E(f = +\infty)) = m(E(f = -\infty)) = 0$$

定理 4.14 $|f| \leq g$ で f が可測関数，g が可積分であれば，f も可積分で

$$\int_E |f| dm \leq \int_E g dm$$

が成り立つ．

定理 4.15 f が可積分とする．このとき「$\forall \varepsilon > 0$ に対して，ある$\delta > 0$ が存在して

$$\forall A \subset E,\ m(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f dm \right| \leq \int_A |f| dm < \varepsilon$$

が成り立つ．

4.4 収束定理

以下では Lebesgue 積分の威力を発揮する収束定理についてみていく．

定理 4.16(Lebesgue の有収束定理) $\{f_n\}_{(n=1,2,\cdots)}$ は E 上の可測関数，$f_n \to f$(概収束 (a.e. で各点収束))，$|f| \leq g$ となる可積分関数 g が存在するとき

$$f \text{ は可積分}, \lim_{n \to \infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm$$

が成り立つ．

[証明] $f_n \to f$(各点収束) より，f は可測．また $|f| \leq g$ であるから定理 4.14 は可積分．

(1) $m(E) < +\infty$ の場合

f_n が有界の場合の証明を少し変更すればよい．定理 4.15 を使う．

(2) $m(E) = +\infty$ の場合
これは積分の定義

$$\lim_{R\to\infty}\int_{E_R} fdm = \int_E fdm$$

より示せる．

定理 4.17 f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を E 上の可積分関数とし，$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots \to f$ (各点収束) とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm = \int_E fdm$$

が成り立つ．

[証明] $f_n \to f$(各点収束) であるから f は可測．また $f \geq 0$ であるから

$$\int_E fdm < +\infty \text{ または } \int_E fdm = +\infty$$

に注意すると

$$(I) \quad \int_E fdm < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm < +\infty \text{ で } \int_E fdm \text{ に等しい}$$
$$(II) \quad \int_E fdm = +\infty \Rightarrow \int_E fdm = +\infty$$

を示せばよいことが分かる．

(I) の場合
$\int_E fdm < +\infty$，つまり f は可積分である．いま $0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots \to f$ であるから

$$|f_n| \leq f$$

従って Lebesgue の有収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm = \int_E fdm$$

(II) の場合
(II-1) $m(E) < +\infty$ の場合
${}^M f_n = \min\{M, f_n\} \to {}^M f$ (各点収束) であるから $|{}^M f_n| \leq M$ (一様有界) であるから Lebesgu の有界収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm \geq \lim_{n\to\infty}\int_E {}^M f_n dm = \int_E {}^M fdm \quad (\star)$$

一方 $\int_E fdm$ の定義より

$$\int_E fdm = \lim_{M\to\infty}\int_E^M fdm = +\infty$$

であるから $(\star)$ を用いて

$$\lim_{n\to\infty} f_n dm \geq \int_E^M fdm = +\infty$$

(II-2) $m(E)=+\infty$ の場合
(I), (II-1) より,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_R} f_n dm = \int_{E_R} f dm$$

ここで

$$\int_E f_n dm \geq \int_{E_R} f_n dm$$

に注意すれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm \geq \int_{E_R} f dm$$

ここで $R\to\infty$ とすれば

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm &\geq \lim_{R\to\infty}\int_{E_R} f dm \\ &= \int_E f dm \\ &= +\infty\end{aligned}$$

以上より示された.

定理 4.18 $f_n \geq 0$ のとき

$$\int_E \sum_{i=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{i=1}^{\infty}\int_E f_n dm$$

定理 4.19(Fatou の補題) $f_n \geq 0$ のとき

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) dm \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n dm \leq \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n dm \leq \int_E \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) dm$$

定理 4.20 $E:\mathcal{R}^d$ の可測集合, $f_n\ (n=1,2,\cdots):E$ 上の可測関数とする. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| dm < +\infty$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ はほとんど至るところで収束し,} \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) dm = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n dm$$

が成り立つ.

[証明] 定理 4.18 より

$$\int_E \sum_{i=1}^{\infty} |f_n| dm = \sum_{i=1}^{\infty}\int_E |f_n| dm < +\infty$$

が成り立つ. 従って定理 4.13 より $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ はほとんど至るところ有界, つまり $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ はほとんど至るところ絶対収束する.

いま

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$$

とおくと g は可積分で

$$|\sum_{n=1}^{N}| \leq g \text{ a.e.}$$

が成り立つ．Lebesgue の有収束定理より

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n dm &= \lim_{N\to\infty}\int_E f_n dm \\ &= \int_E \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n dm \\ &= \int_E \sum_{n=1}^{N} f_n dm\end{aligned}$$

定理 4.21 $E:\mathcal{R}^d$ の可測集合，$f_t(x)$ $(t\in(a,b)-\{t_0\}):E$ 上の可積分関数とし，$\lim_{t\to t_0} f_t(x) = f(x)$(各点収束)，$|f_t|\leq g$ $(\forall t\in(a,b)-\{t_0\})$ となる可積分関数 g がとれるとする．このとき

$$f_{t_0}(x)\text{ は可積分で, }\lim_{t\to t_0}\int_E f_t(x)dx = \int_E f_{t_0}(x)dx$$

が成り立つ．

定理 4.22 $E:\mathcal{R}^d$ 上の可測関数，$f(x,t):E\times(\alpha,\beta)\to\mathcal{R}$ とする．また各 t について x の関数として可積分で，$t\in(\alpha,\beta)$ で微分可能とし，$|\dfrac{\partial f}{\partial t}|\leq g(x)$ となる可積分関数 g が取れるとする．このとき

$$\int_E f(x,t)dx\text{ は }t=t_0\text{で微分可能で,}\qquad \left\{\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx\right\}\Big|_{t=t_0} = \int_E\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=t_0}\right\}dx$$

が成り立つ．

[証明] $t=t_0$ において

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$$

が成り立つ．ここで

$$\phi_h(x) = \frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}$$

とおくと平均値の定理より

$$\begin{aligned}|\phi_h(x)| &= \left|\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\right| \\ &= \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0+\theta h)\right|\leq g(x)\end{aligned}$$

を満たす θ が存在する．従って定理 4.21 を用いて，$\lim_{h\to 0}\phi_h(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$ は可積分で

$$\lim_{h\to 0}\int_E \phi_h(x)dx = \int_E\lim_{h\to 0}\phi_h(x)dx$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_E \phi_h(x)dx &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_E f(x,t_0+h)dx - \int_E f(x,t_0)dx}{h} \\ &= \left\{\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dt\right\}\Big|_{t=t_0}\end{aligned}$$

であることと，

$$\int_E \lim_{h\to 0} \phi_n(x)dx = \int_E \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0} dx$$

であることより，

$$\left.\left\{\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx\right\}\right|_{t=t_0} = \int_E \left\{\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0}\right\}dx$$

が示された．

例 4.3

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

について考える．まず

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}x^\alpha dx = \int_0^1 x^\alpha \log x dx = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

また当然であるが

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha+1} = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

となる．従って

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^1 x^\alpha dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}x^\alpha dx$$

が成り立っている．

実際定理 4.22 を適用する際に上から抑える関数 g が存在するかどうか調べてみる．$\alpha = \alpha_0$ の近傍で $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\alpha)\right| \leq g(x)$ となる可積分関数 $g(x)$ をとってくる．一例として $g(x) = \frac{1}{\alpha_0 e} + 1$ (定数関数) とすればよい．定数関数がこの区間で可積分であることは自明である．

第 II 部
関数解析

5 関数空間

定義 5.1(ノルム) $\mathcal{R}$ 上の線型空間 X の各点 x に対して実数値 $||x||$ が対応していて次の条件が満たされるとき $||x||$ を x の**ノルム**という.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ ||x|| \geq 0,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0\\
&(2)\ ||\alpha x|| = |\alpha|||x||\ \ (\alpha \in \mathcal{R},\ x \in X)\\
&(3)\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||\ \ (x, y \in X)
\end{aligned}
$$

ノルムが定義された空間を**ノルム空間**という.

定義 5.2(Banach 空間) 完備な，つまり任意の Cauchy 列が収束列である，ノルム空間を **Banach 空間**という.

定義 5.3(内積) $\mathcal{R}$ 上の線型空間 X の 2 点 $x, y \in \mathcal{R}$ に対して $(x, y) \in \mathcal{R}$ が対応して，次の条件を満たすとき (x, y) を x と y の**内積**という.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (x, x) \geq 0,\ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\\
&(2)\ (x, y) = (y, x)\ \ (x, y \in X)\\
&(3)\ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)\ \ (\alpha, \beta \in \mathcal{R},\ x, y, z \in X)
\end{aligned}
$$

内積が定義された空間を**内積空間**という．内積空間で $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ と定義すると $||x||$ はノルムになる.

定義 5.4(Hilbert 空間) ノルム $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ について完備な内積空間を **Hilbert 空間**という.

完備なノルム空間が Banach 空間，ノルム $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ に関して完備な内積空間が Hilbert 空間である．ノルム空間に $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ が成立するように内積が導入できるとうれしい！内積空間ならば成立するノルムの等式の一つが”中線定理”である.

定理 5.1(中線定理) X を内積空間とする．$x, y \in X$ に対してノルムを $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ として

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

が成り立つ.

[証明]

$$
\begin{aligned}
||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y)\\
&= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) + (x, x) - 2(x, y) + (y, y)\\
&= 2(||x||^2 + ||y||^2)
\end{aligned}
$$

定理 5.2(von Neumann-P.Jordan の定理) ノルム空間が内積空間となる必要十分条件は

中線定理が成立する

ことである．

[証明] 十分性は上記のとおりである．必要性は難しい．

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x) = ax$$

に帰着させる．

例 5.1 $X = \mathcal{R}^d = \{(x_1, \cdots, x_d) | x_i \in \mathcal{R}\}$ とし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)$ のノルムを

$$||\boldsymbol{x}||_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \max_{1\le j\le d} |x_j| & (p = +\infty) \end{cases}$$

とする．またこのノルムに関して Minkowski の不等式

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||_p \le ||\boldsymbol{x}||_p + ||\boldsymbol{y}||_p$$

が成り立つ．$\mathcal{R}^d$ は $||\cdot||_p$ $(1 \le p \le \infty)$ に関してノルム空間となる．さらに $\mathcal{R}^d$ は $||\cdot||_p$ に関して完備となる．

$\mathcal{R}^d$ では $||\cdot||_p$ の p の値による違いはない．つまり $||\cdot||_p$ は同値なノルムである．ここで同値とは

$$\begin{aligned} ||\cdot||_{p_1} \sim ||\cdot||_{p_2} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\alpha, \beta > 0, \forall \boldsymbol{x} \in X \text{ に対して } \alpha||\boldsymbol{x}||_{p_1} \le ||\boldsymbol{x}||_{p_2} \le \beta||\boldsymbol{x}||_{p_1} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\gamma, \delta > 0, \forall \boldsymbol{x} \in X \text{ に対して } \gamma||\boldsymbol{x}||_{p_2} \le ||\boldsymbol{x}||_{p_1} \le \delta||\boldsymbol{x}||_{p_2} \end{aligned}$$

が成り立つこととする．このとき $||\cdot||_{p_1} \sim ||\cdot||_{p_2}$ ならば

「$||\cdot||_{p_1}$で収束する」$\Leftrightarrow$「$||\cdot||_{p_2}$で収束する.」

つまり

$$\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}||_{p_1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}||_{p_2} = 0$$

が成り立つ．

例 5.2 $X = \mathcal{R}^d$ は内積

$$(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j$$

に関して完備内積空間になる．

例 5.3 $l^p = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots) | \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p < +\infty\}$ $(1 \le p \le \infty)$ とし，$x \in (\xi_1, \xi_2 \cdots) \in l^p$ のノルム

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

とすると，l^p は $||x||_p$ に関して完備なノルム空間となる．

例 5.4 l^2 は内積 $(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\eta_j$ に関して完備内積空間となる．

例 5.5 $l^{\infty}=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots)|\sup_j|\xi_j|<+\infty\}$，ノルム

$$||x||_{\infty}=\sup_j|\xi_j|$$

l^{∞} は $||x||_{\infty}$ に関して完備ノルム空間である．l^p $(p\neq 2)$ は内積空間とはならない．

例 5.6 $c=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots)|\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}\text{は収束列}\}$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ のノルム

$$||x||=\sup_j|\xi_j|$$

に関して c は完備ノルム空間となる．

例 5.7 $\Omega\subset\mathcal{R}^d$，$C(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathcal{R}|f\ \text{は}\Omega\text{上の有界連続}\}$，ノルム

$$||f||_{\infty}=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

に関して $C(\Omega)$ は完備ノルム空間となる．

[証明] $||f||_{\infty}$ がノルムになるのは自明であるから完備性を示す．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がこの空間で Cauchy 列であるとは

$$\forall\varepsilon>0\ \text{に対して}\ n_0\text{がとれて},\ \forall m\geq\forall n\geq n_0\Rightarrow||f_m-f_n||_{\infty}<\varepsilon\quad(\star)$$

が成り立つことである．示したいことは

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{が Cauchy列}\Rightarrow f^{\infty}\in C(\Omega)\ \text{かつ}\ \lim_{n\to\infty}||f_n-f^{\infty}||_{\infty}=0$$

である．まず収束先の候補を見つける．$(\star)$ より各点において $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (実数列) は Cauchy 列である．従って実数の完備性より**各点ごとに**

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f^{\infty}(x)$$

が定義できる．この f^{∞} について $\lim_{n\to\infty}||f_n-f^{\infty}||_{\infty}=0$ を示す．$(\star)$ より

$$\forall\varepsilon>0\ \text{に対して}\ n_0\text{がとれて},\ \forall m\geq\forall n\geq n_0\Rightarrow||f_m-f_n||_{\infty}<\varepsilon\quad(x\in\Omega)$$

ここで $m\to\infty$ とすると

$$\forall\varepsilon>0\ \text{に対して}\ n_0\text{がとれて},\ \forall n\geq n_0\Rightarrow|f^{\infty}(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon\quad(\forall x\in\Omega$$

従って

$$\sup_{x\in\Omega}|f^{\infty}(x)-f_n(x)|=||f^{\infty}-f_n||\leq\varepsilon$$

が成り立つから

$$\lim_{n\to\infty}||f^{\infty}-f_n||_{\infty}=0$$

が成り立つ．

次に $f \in C(\Omega)$ を示す.

$$\lim_{n\to\infty} ||f^\infty - f_n||_\infty = 0 \Rightarrow f^\infty \text{は } f_n \text{の一様収束極限}$$

また

連続関数列の一様収束極限は連続関数になる

従って f^∞ は連続である．以上より $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathcal{R} | f$ はΩ上の有界連続 $\}$ は，ノルム

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

に関して完備ノルム空間となる.

cf. $C(\Omega)^2 = \{f : \Omega \to \mathcal{R} | f$ は連続関数 $\}$，ノルムを

$$||f||_2 = \left(\int_\Omega (f(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

とすると，$C(\Omega)^2$ はこのノルムに関してノルム空間となるが，完備ではない．つまり収束先が $C(\Omega)^2$ の要素とならない Cauchy 列が存在する.

例 5.8 $L^p(E) = \{f : E \to \mathcal{R} | f$ は可測で $\int_E |f|^p dm < +\infty\}$ (E は可測，$1 \le p < +\infty$) とする．このときノルム

$$||f||_p = \left(\int_E |f|^p dm \right)^{1/p}$$

に関して $L^p(E)$ は完備ノルム空間となる.

$$||f - g||_p = 0 \Leftrightarrow \int_E |f - g|^p dm = 0 \Leftrightarrow f = g \text{ a.e.}x$$

が成り立つので $L^p(E)$ では $f = g$ a.e. となる f と g は同一視する.

[証明] 完備性を示すには

$$Cauchy \text{ 列 } \{f_n\}_{n=1}^\infty \text{から収束部分列が取り出せる}$$

ことを示せばよい．なぜならば部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ が収束したとする．この収束先を f^∞ とする．一方 Cauchy 列の定義より

$$m \ge n \ge N \Rightarrow ||f_m - f_n||_p < \varepsilon$$

これより

$$m \ge N, n_k \ge N \Rightarrow ||f_m - f_{n_k}||_p < \varepsilon$$

ここで $k \to \infty$ とすると

$$m \ge N \Rightarrow ||f_m - f^\infty||_p < \varepsilon$$

これは

$$\lim_{m\to\infty} ||f_m - f^\infty||_p = 0$$

を示している.

従ってこのような収束部分列が取り出せることを示す．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ から次のような部分列を作る．
まず n_1 を

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow ||f_n - f_{n_1}||_p < \frac{1}{2}$$

となるようにとる．次に n_2 を $n_2 > n_1$ で

$$\forall n \geq n_2 \Rightarrow ||f_n - f_{n_2}||_p < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

となるようにとる．以下同様にして $n_3, n_4, \cdots$ をとる．このとき

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots,\ ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

以下部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を考える．f_{n_k} を f_k と略して書く．いか $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $L^p(E)$ の収束列となっていることを示す．($\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ がほとんど至るところで各点収束することを示す)
f_k の定義より

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_{k+1} - f_k||_p < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

となる．いま

$$g_k(x) = |f_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{j+1}(x) - f_j(x)|$$

とおくと $g_k \in L^p(E)$ であり $|g_1|^p \leq |g_2|^p \leq \cdots$．さらに

$$||g_k||_p \leq ||f_1|| + \sum j = 1^{k-1} ||f_{j+1} - f_j||_p \leq ||f_1||_p + 1$$

従って定理 4.17 より

$$\begin{aligned}\int_E \lim_{k\to\infty} |g_k(x)|^p dx &= \lim_{k\to\infty} \int_E |g_k(x)|^p dx \\ &\leq \lim_{k\to\infty} ||g_k||_p{}^p \\ &\leq (||f_1||_p + 1)^p \quad (\star)\end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{k\to\infty} g_k(x)$ はほとんど至るところ収束する．この極限を $g(x)$ とおく．ここで $(\star)$ より，$g \in L^p(E)$.

$$f_k(x) = f_1(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{j+1}(x) - f_j(x))$$

と書けることに注意すると $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ はほとんど至るところ絶対収束 ($|f_k| \leq g_k$) する．従って $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ はほとんど至るところ収束する．
つぎに $f \in L^p(E)$ を示す．収束先を $f(x)$ とする．$|f_k| \leq g$ であり $g \in L^p(E)$ であるから $f \in L^p(E)$.
最後に $\lim_{k\to\infty} ||f - f_k||_p = 0$ を示す．

$$\begin{aligned}|f(x) - f_k(x)| &= |f_k(x) + \sum_{j=k}^{\infty} (f_{j+1}(x) - f_j(x) - f_k(x)| \\ &= |\sum_{j=k}^{\infty} (f_{j+1}(x) - f_j(x)| \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} |f_{j+1}(x) - f_j(x)| \\ &\leq g(x) \in L^p(E)\end{aligned}$$

従って $|f(x)-f_k(x)|^p \leq (g(x))^p$ であり $(g(x))^p \in L^p(E)$ であるから Lebesgue の有収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} ||f-f_k||_p{}^p &= \lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|^p dx \\ &= \int_E \lim_{k\to\infty} |f(x)-f_k(x)|dx \\ &= 0\end{aligned}$$

以上より示された.

例 5.9 $L^2(E)$ は内積

$$(f,g)=\int_E f\cdot g dx$$

に関して完備内積空間になる.

例 5.10 $\mathcal{L}^p(E)$ は

$$||f||_p = \left(\int_E |f|^p dm\right)^{1/p} < +\infty$$

を満たす E 上の可測関数 f 全体からなる可測関数 f の全体からなる空間とする．$p=\infty$ のときは

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha | m(E(|f(x)|>\alpha))=0\}$$

を満たす関数全体とする．$||f||_\infty$ は f の**本質的上界**といい，ess.sup f と書く.

$$L^\infty(E)=\{f:E\to\mathcal{R}|\text{ess.}\sup_{x\in E}|f(x)|<+\infty\}$$

はノルム $|f|_\infty$ に関して完備ノルム空間となる.

6　線型作用素

<u>**定義 6.1**</u> X,Y を線型空間とし，$D\subset X$ を部分線型空間とする．このとき

$$T:D\to Y$$

という線形写像とする．T を D から Y への**線型作用素**という．D を定義域といい $D(T)$ と書く. $\{y=Tx|x\in D\}$ を値域といい，$R(T)$ と書く.

<u>**定義 6.2**</u> X,Y をノルム空間とし $D\subset X$，$T:D\to Y$ (線型作用素) とする．T が $x_0\in D$ で連続とは $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in D$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(x_n)=T(x_0)$$

が成り立つことをいう．D で連続な線型作用素を連続線型作用素という.

定理 6.1 X, Y をノルム空間，$D \subset X$，$T : D \to Y$ (線型作用素) とする．このとき以下 (1)，(2) は同値である．

(1) T はある 1 点 $x_0 \in D$ で連続
(2) T は連続作用素
(3) ある $M > 0$ が存在して $||Tx||_Y \leq M||x||_X$ $(\forall x \in D)$

[証明] まず (1)⇒(2) を示す．$\forall x \in D$ を考える．$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} x_n - x + x_0 = x_0$$

T は x_0 で連続であるから

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n - x + x_0) = T(x_0)$$

T は線型作用素であるから

$$T(x_n - x + x_0) = T(x_n) - T(x) + T(x_0)$$

なので

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$$

が成り立つ．よって (1)⇒(2) が示された．

次に (2)⇒(3) を示す．どんな $M > 0$ に対しても $||Tx|| \leq ||x||$ が成立しない $x \in D$ が存在するとして矛盾を導く．

いま $M = n$ とすると，$||Tx|| \leq n||x||$ が成立しない x が取れる．これを x_n とする．

$$||Tx_n|| > n||x_n||$$

ここで

$$y_n = \frac{x_n}{||x_n||} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

とすると，$||y_n|| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$．つまり $y_n \to 0 (n \to \infty)$．しかし

$$\begin{aligned} Ty_n = T\Big(\frac{x_n}{||x_n||} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) &= \frac{1}{||x_n||\sqrt{n}} T(x_n) \\ &> \frac{1}{||x_n||\sqrt{n}} \cdot n||x_n|| \\ &= \sqrt{n} \to \infty \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

これは T の連続性に矛盾する．従って (2)⇒(3) が示された．

最後に (3)⇒(1) を示す．

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

とすると (3) の仮定より

$$||Tx_n - Tx_0|| \leq M||x_n - x_0|| \to 0 (n \to \infty)$$

従って

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$$

よって (3)⇒(1) が示された.

定義 6.3 連続作用素 T に対して

$$||T|| = \sup_{x \in D,\ ||x|| \neq 1} \frac{||Tx||}{||x||} < +\infty$$

を考えこれを T の作用素ノルムという. $D = X$ のとき連続作用素 T は $||T|| < +\infty$ となるので有界作用素ともいう.

例 6.1

$$||f||_\infty = \sup_x |f(x)|$$

とし,

$$\begin{array}{rcl} T : C([0,1]) & \to & C([0,1]) \\ f & \mapsto & Tf \end{array}$$

とする. ただし

$$Tf = \int_0^x f(t)dt \ (0 \leq x \leq 1)$$

とする. このとき

$$||T|| = \sup_{||f|| \neq 0} \frac{||Tf||_\infty}{||f||_\infty} = 1$$

例 6.2

$$\begin{array}{rcl} T : C([0,1]) & \to & C([0,1]) \\ f & \mapsto & Tf \end{array}$$

とする. ただし

$$Tf = \frac{df}{dx}$$

とする. この作用素は有界ではない. 実際 $f_n = e^{-nx}$ とすると

$$||f_n||_\infty = 1, ||Tf||_\infty = ||\frac{df}{dx}||_\infty = ||ne^{-nx}||_\infty = n$$

これより有界な作用素ではないことが分かる.

以上