収束定理・Fubiniの定理

1　問1

可積分関数 f, g, f_n, g_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が条件 $f_n \to f$ a.e.$(n \to \infty)$，$|f_n| \leq g_n$ かつ

$$\int_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu \quad (n \to \infty)$$

を満たすとする．このとき

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$$

が成り立つことを示せ．(Hint：優収束定理の証明を見よ．)

2　問2(Sheffeの補題)

可積分関数 f, f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ があって，$f_n \to f$ a.e.$(n \to \infty)$ を満たすとする．このとき

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0 \Longleftrightarrow \int_X |f_n| d\mu \to \int_X |f| d\mu$$

であることを示せ．(Hint：まず $\{f_n\}$ が非負値関数列のときを示せ．また Fatou の補題を使え．)

3　問3

f を $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度に関して可積分な関数とし

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$$

とする．このとき F は $\mathbf{R}$ 上で連続であることを示せ.

4　問4

$f_n \geq 0$ を可測として，$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$，$\int f_1 d\mu < \infty$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

を示せ.

5　問 5

f_n が $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たし，$f_n \to f$ とする．もし $p \geq 1$ に対して

$$\int \varphi^p d\mu < \infty$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0$$

を示せ.

6　問 6

$f(x), g(x)$ が $\mathbf{R}^n$ で可積分ならば，a.e.x に対して

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

は有限な値をとり，$\mathbf{R}^n$ で可積分であることを示せ.

7　問 7

μ を $\mathbf{R}^n$ におけるルベーグ測度とし，A, B はルベーグ可測集合とする．このとき

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mu((A - \{x\}) \cap B)dx = \mu(A)\mu(B)$$

であることを証明せよ．(Hint：$\mu((A - \{x\}) \cap B) = \int \chi_{A-\{x\}}(y)\chi_B(y)d\mu(y) = \int \chi_A(y+x)\chi_B(y)d\mu(y)$)