可測関数

1　まとめ

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$E \in \mathcal{F}$ とする．$f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}\,(\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{\pm\infty\})$ と $a \in \overline{\boldsymbol{R}}$ に対して，

$$E(f > a) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$$

と略記することにする．$E(f \leq a), E(f = a)$ 等も同様とする．
定義 1
$f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ が

$$\forall a \in \boldsymbol{R},\ E(f > a) \in \mathcal{F}$$

のとき，f を (E 上)$\mathcal{F}$-可測関数，あるいは単に可測関数，可測であるという．
この条件を，任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$E(f \geq a),\ E(f < a),\ E(f \leq a) \in \mathcal{F}$$

のいずれかとしても同値である．
定義 2
$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ を可測空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．

$$\forall E \in \mathcal{G},\ f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$$

であるとき，つまり

$$f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$$

となるとき，f を $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-可測写像，あるいは単に可測写像，可測であるという．
定義 3
$E \in \mathfrak{M}_d$ とし，$f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．ただし，$\mathfrak{M}_d$ は d 次元 Lubesgue 可測集合族とする．f が $\mathfrak{M}_d$-可測関数であるとき，f を Lubesgue-可測関数，あるいは Lubesgue-可測であるという．
定義 4
$E \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$ とし，$f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．ただし，$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$ は d 次元 Borel 集合族とする．f が $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$-可測関数であるとき，$f$ を Borel-可測関数，あるいは Borel-可測であるという．
$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d) \subset \mathfrak{M}_d$ より明らかに，f が Borel-可測ならば Lubesgue-可測である．

2　問 1

$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}), (Z, \mathcal{H})$ をそれぞれ可測空間とし，$f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ をそれぞれ可測写像とする．このとき，$g \circ f : X \to Z$ も可測写像になることを示せ．

3　問 2

$f : X \to \boldsymbol{R}$ とする．以下は同値であることを示せ．

(1) f は可測関数である．

(2) f を $(X, \mathcal{F})$ から $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ への写像とみなすとき，f は可測写像である．

4　問 3

$f : \boldsymbol{R} \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．f が $\boldsymbol{R}$ 上上半連続ならば Borel-可測であることを示せ．ただし，

$$f \text{ が } x_0 \in \boldsymbol{R} \text{ で上半連続} \iff \forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

$$f \text{ が } A(\subset \boldsymbol{R}) \text{ 上上半連続} \iff \text{各 } x \in A \text{ で } f \text{ が上半連続}$$

と定義する．

5　問 4

(X, d) を距離空間とし，$f : X \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．

(1) f が X 上下半連続なことと，任意の $a \in \overline{\boldsymbol{R}}$ に対して $X(f < a)$ が開集合であることが同値であることを示せ．ただし，

$$f \text{ が } x_0 \in X \text{ で下半連続} \iff \varliminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\delta \to +0} \inf\{f(x) \mid x \in X,\, d(x, x_0) \leq \delta\} \geq f(x_0)$$

$$f \text{ が } A(\subset X) \text{ 上下半連続} \iff \text{各 } x \in A \text{ で } f \text{ が下半連続}$$

と定義する．

(2) f が X 上下半連続ならば Borel-可測であることを示せ．

6　問 5

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$E \in \mathcal{F}$ とおく．$f : E \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．f が $\mathcal{F}$-可測，g が Borel-可測であるとき，$g \circ f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ が $\mathcal{F}$-可測であることを示せ．

7　問 6

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$E \in \mathcal{F}$ とおく．$f_n : E \to \overline{\boldsymbol{R}}\,(n = 1, 2, \cdots)$ は $\mathcal{F}$-可測であるとする．このとき，集合 $A = \{x \in E \mid \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$が収束する．$\}$，集合 $B = \left\{x \in E \mid \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \pm\infty\right\}$ について，$A, B \in \mathcal{F}$ を示せ．

8　問 7

$(\boldsymbol{R}, \mathcal{F})$ を可測空間とする．$\boldsymbol{R}$ 上の任意の連続関数が $\mathcal{F}$-可測であるための必要十分条件は，$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}) \subset \mathcal{F}$ であることを示せ．

9　問 8

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を完備測度空間とし，$E \in \mathcal{F}$ とおく．$f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ は $\mathcal{F}$-可測とし，$g : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．$E(f \neq g) \in \mathcal{F}$ かつ $\mu(E(f \neq g)) = 0$ ならば，g も $\mathcal{F}$-可測であることを示せ．

10　問 9

$E \in \mathfrak{M}_d$ とし，$f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．以下は同値であることを示せ．

(1) f は Lebesgue-可測である．

(2) $E' \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$ と $g : E' \to \overline{\boldsymbol{R}}$ なる Borel-可測関数が存在して，

$$E \subset E',\, E(f \neq g) \in \mathfrak{M}_d,\, m_d(E(f \neq g)) = 0$$

となる．ここに，m_d は d 次元 Lebesgue 測度とする．

11　問 10

$f : \boldsymbol{R} \to \overline{\boldsymbol{R}}$ が単調増加であるとき，Borel-可測であることを示せ．

12　問 11

$f : \boldsymbol{R} \to \overline{\boldsymbol{R}}$ の不連続点が高々可算個であるとき，Borel-可測であることを示せ．

13　問 12

$f : \boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}$ が Borel-可測であるとし，可測空間 $(X, \mathcal{F})$ に対して $g_i : X \to \boldsymbol{R}\,(i = 1, 2, \cdots, d)$ を $\mathcal{F}$-可測とする．このとき，$F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_d(x))$ は $\mathcal{F}$-可測であることを示せ．

14　問 13

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$f, g : X \to \boldsymbol{R}$ を $\mathcal{F}$-可測とする．問 12 を用いて

$$af + bg\,(a, b \in \boldsymbol{R}),\, fg,\, |f|^\alpha\,(\alpha > 0),\, f^+,\, f^-,\, f \wedge g,\, f \vee g$$

が $\mathcal{F}$-可測であることを示せ．

15　問 14

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$f : X \to \overline{\boldsymbol{R}}$ とする．f が $\mathcal{F}$-可測であるための必要十分条件は $|f|$ と $|f + 1|$ とが $\mathcal{F}$-可測であることを示せ．

16　問 15

$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が各点で微分可能とする．このとき f' は Borel-可測であることを示せ.