積分

1　まとめ

2　問 1

$E \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$ とし，$f : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ を Borel-可測であるとする．$f(x) \geq 0\,(x \in E)$ ならば

$$\int_E f d\mu > 0 \Longleftrightarrow \mu(E(f > 0)) > 0$$

であることを示せ.

3　問 2

$(X, 2^X, \mu)$ を測度空間とし，ある $a \in X$ が存在して $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(X \setminus \{a\}) = 0$ であるとする．このとき，可測関数 $f : X \to \overline{\boldsymbol{R}}$ に対して $\displaystyle\int_X f d\mu = f(a)$ であることを示せ.

4　問 3

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ が σ-有限であるとするとき，$f(x) > 0\,(x \in X)$ を満たす X 上可積分な関数が存在することを示せ.

5　問 4

$f : X \to [0, +\infty]$ が可測であるとする．$E \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_E f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad (\text{a.e.}\, x \in E)$$

を示せ.

6　問 5

$f : X \to \boldsymbol{C}$ が可積分であるとする.

$$\forall E \in \mathcal{F},\ \int_E f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad (\text{a.e.}\, x \in X)$$

を示せ.

7　問 6

$f : X \to \boldsymbol{C}$ が可積分であるとする．

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu$$

が成り立つするとき，$\alpha \in \boldsymbol{C}$ が存在して $\alpha f(x) = |f(x)|\,(\mathrm{a.e.}\, x \in X)$ となることを示せ．

8　問 7

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間とし，$f : X \to \boldsymbol{C}$ が可積分であるとする．$S \subset \boldsymbol{C}$ を閉集合とし，

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{F},\, \mu(E) > 0)$$

とおく．任意の $E \in \mathcal{F},\, \mu(E) > 0$ に対して $A_E(f) \in S$ ならば $f(x) \in S\,(\mathrm{a.e.}\, x \in X)$ が成り立つことを示せ．

9　問 8

f は X 上の有界かつ可積分な関数とする．このとき，$|f|^2$ も可積分であることを示せ．また，f が有界でないなら，このことは一般には成立しないことを示せ．

$\mathcal{I}$