集合族

1　まとめ

X を集合とし，集合族 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F} \subset 2^X$(X の部分集合全体) とする．
定義 1

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

のとき，$\mathcal{F}$ を有限加法族，集合体，あるいは代数 (algebra) という．
定義 2

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

のとき，$\mathcal{F}$ を σ-加法族，完全加法族，σ-集合体，あるいは σ-代数 (algebra) という．
定義 3

1. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F},\ A_n \subset A_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
2. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F},\ A_n \supset A_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

のとき，$\mathcal{F}$ を単調族 (monotone class) という．
定義 4

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

のとき，$\mathcal{F}$ を π-族，または乗法族という．
定義 5

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F},\ A \supset B \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

3. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $A_n \subset A_{n+1}\,(n=1,2,\cdots) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

のとき，$\mathcal{F}$ を Dynkin 族，または δ-族という．

定義 6

X_i 上の有限加法族 $\mathcal{E}_i\,(i=1,2)$ に対して

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 = \{E_1 \times E_2 \mid E_i \in \mathcal{E}_i\,(i=1,2)\}$$

とするとき，$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ で生成される $X_1 \times X_2$ 上の有限加法族を

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma_0[\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2]$$

と表す．$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ は，$E_1 \times E_2\,(E_i \in \mathcal{E}_i)$ の有限個の直和全体の集合と等しい．

定義 7

X_i 上の σ-加法族 $\mathcal{F}_i\,(i=1,2)$ に対して

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{F_1 \times F_2 \mid F_i \in \mathcal{F}_i\,(i=1,2)\}$$

とするとき，$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ で生成される $X_1 \times X_2$ 上の σ-加法族を

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma[\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2]$$

と表す．

2 問 1

有限加法族の定義を

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

としても元の定義と同値であることを示せ．

3 問 2

σ-加法族の定義を

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
4. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

としても元の定義と同値であることを示せ．

4　問 3

$\mathcal{F}_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ が有限加法族であるとき，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ も有限加法族となることを示せ．

これより，集合族 $\mathcal{A}$ に対して

$$\sigma_0[\mathcal{A}] = \bigcap\{\mathcal{F} \supset \mathcal{A} \mid \mathcal{F} \text{ は有限加法族 }\}$$

とおくと，これは $\mathcal{A}$ を含む最小の有限加法族となる．$\mathcal{A}$ を含む有限加法族として特に 2^X がとれるので，このような共通部分がとれることに注意する．$\sigma_0[\mathcal{A}]$ を $\mathcal{A}$ が生成する有限加法族という．

5　問 4

$\mathcal{F}_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ が σ-加法族であるとき，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ も σ-加法族となることを示せ．

これより，集合族 $\mathcal{A}$ に対して

$$\sigma[\mathcal{A}] = \bigcap\{\mathcal{F} \supset \mathcal{A} \mid \mathcal{F} \text{ は}\sigma\text{-加法族 }\}$$

とおくと，これは $\mathcal{A}$ を含む最小の σ-加法族となる．$\mathcal{A}$ を含む σ-加法族として特に 2^X がとれるので，このような共通部分がとれることに注意する．$\sigma[\mathcal{A}]$ を $\mathcal{A}$ が生成する σ-加法族という．

6　問 5

X を非可算集合とする．$\mathcal{M} = \{A \in 2^X \mid A \text{ あるいは } A^c \text{が可算集合 }\}$ とすると $\mathcal{M}$ は σ-加法族となることを示せ．また，$\mathcal{M}_0 = \{A \in 2^X \mid A \text{ あるいは } A^c \text{が有限集合 }\}$ とすると $\sigma[\mathcal{M}_0] = \mathcal{M}$ であることを示せ．

7　問 6

$\boldsymbol{R}^n$ における開集合の全体，閉集合の全体，コンパクト集合の全体をそれぞれ $\mathcal{O}_n, \mathcal{F}_n, \mathcal{K}_n$ とするとき，

$$\sigma[\mathcal{O}_n] = \sigma[\mathcal{F}_n] = \sigma[\mathcal{K}_n]$$

を示せ．

8　問 7

可算無限個の元からなる σ-加法族は存在しないことを示せ．(元とは，集合族の元（集合）のことを指す．)

9　問 8

集合族 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^X$ が σ-加法族でも，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ は σ-加法族とは限らないことを示せ．

10 問 9

$\mathcal{F}_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ が単調族であるとき，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ も単調族となることを示せ.

これより，集合族 $\mathcal{A}$ に対して

$$\mathcal{M}[\mathcal{A}] = \bigcap\{\mathcal{F} \supset \mathcal{A} \mid \mathcal{F} \text{ は単調族 }\}$$

とおくと，これは $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族となる．$\mathcal{A}$ を含む単調族として特に 2^X がとれるので，このような共通部分がとれることに注意する．$\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ を $\mathcal{A}$ が生成する単調族という.

11 問 10

集合族 $\mathcal{F}$ が有限加法族かつ単調族であることと，σ-加法族であることは同値であることを示せ.

12 問 11

有限加法族 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ も有限加法族であることを示せ.

13 問 12

有限加法族 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{M}[\mathcal{F}] = \sigma[\mathcal{F}]$ であることを示せ.

14 問 13

Dynkin 族の定義を

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F}, A \supset B \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F},\ A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j) \Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

としても元の定義と同値であることを示せ.

15 問 14

$\mathcal{F}_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ が Dynkin 族であるとき，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ も Dynkin 族となることを示せ.

これより，集合族 $\mathcal{A}$ に対して

$$\delta[\mathcal{A}] = \bigcap\{\mathcal{F} \supset \mathcal{A} \mid \mathcal{F} \text{ は Dynkin 族 }\}$$

とおくと，これは $\mathcal{A}$ を含む最小の Dynkin 族となる．$\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族として特に 2^X がとれるので，このような共通部分がとれることに注意する．$\delta[\mathcal{A}]$ を $\mathcal{A}$ が生成する Dynkin 族という.

16　問 15

集合族 $\mathcal{F}$ が Dynkin 族かつ π-族であることと，σ-加法族であることは同値であることを示せ.

17　問 16

π-族 $\mathcal{F}$ に対して，$\delta[\mathcal{F}]$ も π-族であることを示せ.

18　問 17

π-族 $\mathcal{F}$ に対して，$\delta[\mathcal{F}] = \sigma[\mathcal{F}]$ であることを示せ.

19　問 18

$(X,\mathcal{F}),(Y,\mathcal{G})$ を可測空間とする．写像 $f : X \to Y$ と集合族 $\mathcal{G}_0 \subset 2^Y$ に対して，

$$f^{-1}(\mathcal{G}_0) = \{F \in 2^X \mid f(F) \in \mathcal{G}_0\}$$

とおく.

$$f^{-1}(\sigma[\mathcal{G}_0]) = \sigma[f^{-1}(\mathcal{G}_0)]$$

を示せ.

20　問 19

$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^q) = \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^{p+q})$ であることを

(1) 問 12 の結果を用いて示せ.

(2) 問 17 の結果を用いて示せ.