測度

1　まとめ

2　問 1

測度空間 $(X, 2^X, \sharp)$ ($\sharp$ は数え上げ測度) が σ-有限である必要十分条件は，X の濃度が高々可算個であることを示せ.

3　問 2

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，Y を集合とし，$f : X \to Y$ とする.
(1) $\mathcal{N} = \{A \in 2^Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ は σ-加法族となることを示せ.
(2) $A \in \mathcal{N}$ に対して $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ と定義する．このとき $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ は測度空間になることを示せ.
(3) $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ が σ-有限ならば $(X, \mathcal{M}, \mu)$ も σ-有限であることを示せ．また，この逆は成り立つか？
(4) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ が完備ならば $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ も完備であることを示せ.
(5) X, Y が位相空間であり f は連続とする．$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}$ ならば $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{N}$ を示せ．ここに，$\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$ はそれぞれ X, Y におけるボレル集合族とする.

4　問 3

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

$$\overline{\mathcal{F}} = \{E \in 2^X \mid \exists B, N \in F,\ E \triangle B \subset N,\ \mu(N) = 0\}$$

とする.
(1) $\overline{\mathcal{F}}$ は σ-加法族になることを示せ.
(2) $E \in \overline{\mathcal{F}}$ に対して，上の条件を満たす B をとって，

$$\overline{\mu}(E) = \mu(B)$$

と定義する．このとき，$\overline{\mu}(E)$ は上の B, N のとり方に依らず一意的に定まる (well-defined である) ことを示せ.
(3) $\overline{\mu}$ は $\overline{\mathcal{F}}$ 上の測度になることを示し，さらに完備になることを示せ.
以上より，$(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ は完備測度空間となる.

5　問 4

$(Y, \mathcal{G}, \nu)$ を測度空間，$f : X \to Y$ を写像とする．

$$\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{G}), \quad \mu(A) = \inf\{\nu(B) \mid B \in \mathcal{G},\, A \subset f^{-1}(B)\}\,(A \in 2^X)$$

とおくと，$(X, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間となることを示せ．

6　問 5

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間，μ を $\mathcal{F}$ 上のジョルダン測度 (有限加法的測度) であり，$\mu(X) < +\infty$ を満たすとする．このとき，μ が $\mathcal{F}$ 上の測度である (完全加法的である) ことと，$\mathcal{F}$ の任意の減少列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

となることは同値であることを示せ．

7　問 6

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間，μ を $\mathcal{F}$ 上のジョルダン測度とする．このとき，μ が $\mathcal{F}$ 上の測度であることと，$\mathcal{F}$ の任意の増加列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

となることは同値であることを示せ．

8　問 7

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間，つまり $\mu(X) < +\infty$ を満たす測度空間とする．このとき，$\{x\} \in \mathcal{F}$ かつ $\mu(\{x\}) > 0$ を満たす X の元 x は高々可算個であることを示せ．

9　問 8

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．$\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) < +\infty\}$ とおき，関係 $\sim$ を $A, B \in \mathcal{F}_0$ に対して $A \sim B \Longleftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$ によって定義する．

(1) $\sim$ は $\mathcal{F}_0$ 上の同値関係であることを示せ．

(2) $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_0/\sim$ とおく．$A \in \mathcal{F}_0$ の $\sim$ による同値類を $\hat{A}$ で表すことにする．$\hat{A}, \hat{B} \in \hat{\mathcal{F}}$ に対して $\rho(\hat{A}, \hat{B}) = \mu(A \triangle B)$ とおく．ρ が代表元のとり方に依らず定まる (well-defined である) ことを示せ．

(3) $(\hat{\mathcal{F}}, \rho)$ は距離空間であることを示せ．