

2008 年度 冬学期 信号解析入門ノート

Kiz

2009 年 2 月 15 日

第 I 部

線形システム

1 線形システムの基礎

1.1 この授業の狙いの的なにか

1.2 複素正弦波

オイラーの定理で一般に θ と表記されるところに ωt を代入すると、

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (1.2.1)$$

となるので初期位相 θ を持つ信号 $x(t)$ は

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{j(\omega t + \theta)} \\ &= \underbrace{Ae^{j\theta}}_{\text{複素振幅}} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

1.3 線形システムとは?

とある線形システム ϕ が入力 $x(t)$ を $y(t)$ に変換するとき、これを簡略に

$$y(t) = \phi[x(t)]$$

と表すことにする。

定義 1 (線形システムの定義) ϕ が $x_1(t), x_2(t)$ をそれぞれ $y_1(t), y_2(t)$ に写すとき、 $ax_1 + bx_2$ が $ay_1 + by_2$ に写るなら ϕ は線形。^{*1}

ここから次が導かれる。

^{*1} 要は線形写像の定義そのまま

命題 1

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \quad (1.3.1)$$

$$y(t) = \phi \left[\sum_k a_k x_k(t) \right] \quad (1.3.2)$$

$$= \sum_k a_k \phi [x_k(t)] \quad (1.3.3)$$

定数倍、微積分、加減算などがこれにあたる。

入力を基本波形に分解しておけば、基本波形の応答だけを用意しておけば任意の信号の入力が得られることになる。ここで複素正弦波を使うことになる。

$$\text{in } x(t) = A_1 e^{j\theta_1} e^{j\omega t} \quad (1.3.4)$$

$$\text{out } y(t) = A_2 e^{j\theta_2} e^{j\omega t} \quad (1.3.5)$$

$$H(j\omega) := y/x = \frac{A_2}{A_1} e^{j(\theta_2 - \theta_1)} \quad (1.3.6)$$

$$= |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} \quad (1.3.7)$$

2 フーリエ級数とフーリエ変換

2.1 周期波形のフーリエ級数展開

定理 1 $x(t)$ が周期 T を持つ時、 $x(t)$ は $\omega = n\omega_0 = n \frac{2\pi}{T}$ の正弦波の和で表すことが出来る。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\} \quad (2.1.1)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.1.2)$$

ここで、係数 α_n は以下の通り。

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.1.3)$$

証明. $\{\phi_n\}$ があるベクトル空間の基底であり、内積が次のように与えられるとき、 $\{\phi_n\}$ は正規直交基底と呼ぶ。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j} \quad (2.1.4)$$

また、この場合の内積は次のように定義される。

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \delta_{i,j} \quad (2.1.5)$$

さて、このとき

$$x \cdot \phi_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \phi_n^*(t) dt \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_m \alpha_m \phi_m(t) \right] \phi_n^*(t) dt \quad (2.1.7)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\alpha_m \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt \right] \quad (2.1.8)$$

$$= \alpha_n \quad (2.1.9)$$

□

正直、微分と無限級数の交換とかかなり危険ですけどねえ。

3 非周期波形のフーリエ変換

上で $T \rightarrow \infty$ を考えることにする。まず、

$$X(j\omega)|_{\omega=n\omega_0} := X(jn\omega_0) = \alpha_n T \quad (3.0.10)$$

とおくと

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \alpha_n T \quad (3.0.11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.0.12)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.0.13)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(jn\omega_0)}{T} e^{jn\omega_0 t} \quad (3.0.14)$$

$$(3.0.15)$$

ここで、 $\Delta\omega := \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ とすると、

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(jn\Delta\omega)}{T} e^{jn\Delta\omega t} \quad (3.0.16)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.0.17)$$

下のようにまとめる。

$$\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (3.0.18)$$

$$\begin{cases} X(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jf)e^{j2\pi ft} df \end{cases} \quad (3.0.19)$$

$$\begin{cases} X(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (3.0.20)$$

4 信号波形のフーリエ解析

4.1 具体例

4.1.1 単一矩形波

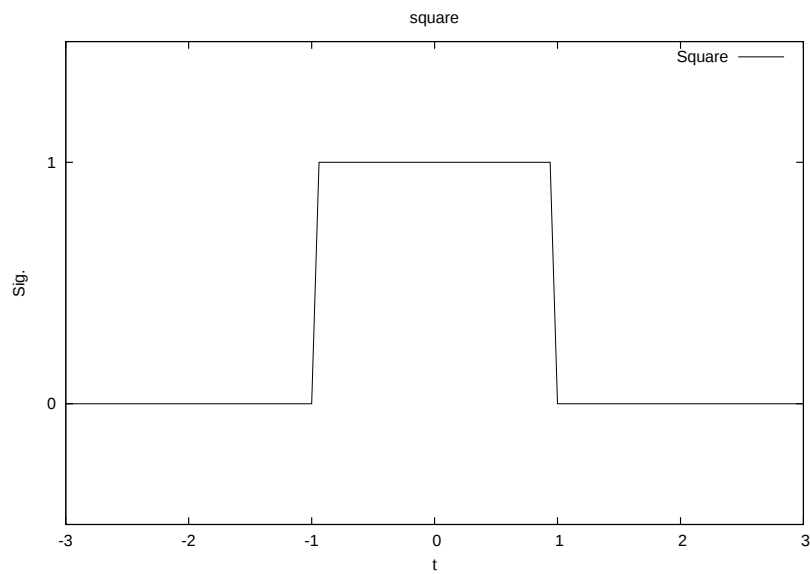


図 1 矩形波

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1.1)$$

$$= E \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1.2)$$

$$= E \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \quad (4.1.3)$$

$$= \frac{E}{\pi f} \sin 2\pi f \frac{\tau}{2} \quad (4.1.4)$$

$$= E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \quad (4.1.5)$$

4.1.2 インパルス関数

まずデルタ関数について良く分からんということで Wikipedia に頼る。

デルタ関数とは次の二つを満たす超関数である。

$$\delta(x) = 0 \quad \text{if } x \neq 0 \quad (4.1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.1.7)$$

工学的には

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.1.8)$$

と見て十分か。

このとき、上の矩形波の議論の際に $E\tau = 1, \tau \rightarrow +0$ とするとインパルスとして扱う事が出来、
 $\lim_{\tau \rightarrow 0} X(f) = 1$ つまり、インパルスは定数に移る。

定理 2 有る周期波形 $x(t)$ に対し、周期 T と一周分きの波形 $\tilde{x}(t)$ のフーリエ変換が与えられたならば、 x のフーリエ級数の係数 α_n は求まり、その値は下のように与えられる。

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \tilde{X}(f) \Big|_{f=\frac{n}{T}} \quad (4.1.9)$$

そのため、周期波形 $x(t)$ のフーリエ級数 α_n は $\frac{1}{T} \tilde{X}(f)$ を包絡線とする間隔 $\frac{1}{T}$ の離散スペクトルとなる。

証明.

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (4.1.10)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (4.1.11)$$

$$= \frac{1}{T} \tilde{X}(f) \quad (4.1.12)$$

□

4.1.3 ガウス関数

ガウス関数はガウス関数に移る。

4.2 周期波形と非周期波形の混在波

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

ただし、 x_1 が非周期、 x_2 が周期波形である。ここで非周期波形については $X(f) = (\mathfrak{F}x)(f)$ とできるが周期波形のフーリエ変換が問題となる。方法としてはインパルス関数 $\delta(x)$ を使う。

4.2.1 デルタ関数の重要な性質

$x(t)$ が $t = t_0$ で連続のとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

ルベグ積分しても求まらないそうです、つうかほぼ定義やな。

4.2.2 デルタ関数のフーリエ変換

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} 1 \quad (4.2.1)$$

$$\because X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{j2\pi ft} dt = 1 \quad (4.2.2)$$

$$1 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(f) \quad (4.2.3)$$

これを一般化して

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-j2\pi ft_0} \quad (4.2.4)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(f - f_0) \quad (4.2.5)$$

ここで、周期波形に関してはフーリエ級数展開から

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$$

が言えるので、

$$(\mathfrak{F}x)(f) = \sum_n \alpha_n \delta(f - nf_0) \quad (4.2.6)$$

よって

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (4.2.7)$$

$$\downarrow \mathfrak{F} \quad (4.2.8)$$

$$X(f) = X_1(f) + \sum_n \alpha_n \delta(f - nf_0) \quad (4.2.9)$$

4.3 有益な発展内容

4.3.1 Parseval の等式

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \quad (4.3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (4.3.2)$$

グラフの全領域に対する二乗の積分が等しいということで、要は面積が変換によっても変化しないことを示している。物理的には波のエネルギーが t 成分で見ても f 成分で見ても変化しないと言った感じでとらえればよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f) df \quad (4.3.3)$$

4.3.2 実波形のスペクトル

命題 2 任意の t に対して関数 x が実数であるとき、

$$\begin{cases} \alpha_{-n} = \alpha_n^* & \text{級数} \\ X(-f) = X^*(f) & \text{変換} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

証明. $\forall t(x(t) \in \mathbb{R})$ の時、 x は下のように表わされる。

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] + \frac{a_0}{2} \quad (4.3.5)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{jnt} \quad (4.3.6)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} [\alpha_n e^{jnt} + \alpha_{-n} e^{j(-n)t}] + \alpha_0 \quad (4.3.7)$$

ここで

$$\begin{cases} \cos nt = \frac{e^{jnt} + e^{-jnt}}{2} \\ \sin nt = \frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{2j} \end{cases} \quad (4.3.8)$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ \alpha_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \end{cases} \quad (4.3.9)$$

このとき $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ なので、 α_{-n} は α_n と共役。

□

系 1 x が偶関数または奇関数であるときは次の事が言える。

- x が偶関数であるとき、 $\forall i b_i \equiv 0$ で $\alpha_{-n} = \alpha_n \in \mathbb{R}$
- x が奇関数であるとき、 $\forall i a_i \equiv 0$ で $\alpha_{-n} = -\alpha_n$ で α_i は純虚数

4.3.3 たたみこみ積分

定理 3

$$\begin{cases} x(t) \\ h(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \begin{cases} X(f) \\ H(f) \end{cases} \quad (4.3.10)$$

のとき、次のような $y(t)$ に関して次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \\ \xrightarrow{\mathfrak{F}} Y(f) &= H(f)X(f) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

証明.

$$(\mathfrak{F}y) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.3.12)$$

$$= \text{証明不能です本当にありがとうございました} \quad (4.3.13)$$

□

これを線形システムの応用に対して考える。 $t = 0$ でのインパルスに対して応答 $h(t)$ を持つ線形システムがあるとすると、 $x(t)(x \equiv 0 \text{ when } t \geq 0)$ に対しての応答 $y(t)$ はどう与えられるだろうか？

t 秒前のインパルスの応答が $h(t)$ である。そのため、 $y(t_0)$ の値を考える時に、 δt 秒前の入力 $x(t_0 - \delta t)$ の与える応答は $x(t_0 - \delta t)h(\delta t)$ でこれを全範囲の t に対して積分し、

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \quad (4.3.14)$$

5 信号の標本化

第 II 部

不規則信号の解析

6 不規則信号の基礎

6.1 不規則信号とは

■ 現象 世の中の現象というのは次の二つに分類される。

- 確定現象 deterministic phenomena
- 不確定現象 undeterministic phenomena

特に不確定事象は不確定ではあっても統計的には規則がみいだせることが多い。

■ どうやって扱うか それぞれの現象は確率的だが、数多くサンプルを集めると共通点が見出せる。事象の集合を標本空間、それぞれのサンプルを標本点という。

不規則変数

random variable 事象が数値で表される確率統計現象

不規則信号

random signal 事象が時間変化する信号である確率統計現象

6.2 確率密度関数 (probability density function) と統計量

6.2.1 一変数

定義 2 確率変数 X が x 以下であるような確率を $P(x)$ とすると、確率密度関数 $p(x)$ 、略して pdf は下のように定義される。

$$P(x) = \text{Prob.} \{X \leq x\} \quad (6.2.1)$$

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (6.2.2)$$

また、期待値 $E(X)$ とモーメントは下のように定義される。

$$E(X) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i & \text{離散量} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx & \text{連続量} \end{cases} \quad (6.2.3)$$

$$=: m \quad \text{it stands for meaning value} \quad (6.2.4)$$

$$E[X^n] =: m_n \quad n \text{ 次のモーメント} \quad (6.2.5)$$

$$E[(X - m)^n] =: \mu_n \quad n \text{ 次の中心モーメント} \quad (6.2.6)$$

$$\mu_0 = 1 \quad (6.2.7)$$

$$\mu_1 = 0 \quad (6.2.8)$$

$$\mu_2 = \delta^2 \quad \text{分散} \quad (6.2.9)$$

$$\frac{\mu_3}{\delta^3} \quad \text{歪度} \quad (6.2.10)$$

$$\frac{\mu_4}{\delta^4} - 3 \quad \text{尖度, ガウス関数を 0 になるよう調整している} \quad (6.2.11)$$

6.2.2 多変数

$$x_1, \dots, x_n \rightarrow p(x_1, \dots, x_n) \quad (6.2.12)$$

$$P(\mathbf{x}) = \text{Prob.} \{ \forall i X_i \leq x_i \} \quad (6.2.13)$$

結合確率分布関数とか言うらしい。

また、 $n = 2$ の時の統計量は下の通り

$$\mu_{k,l} = E[(X_1 - \bar{x}_1)^k (X_2 - \bar{x}_2)^l] \quad (6.2.14)$$

とくに $\mu_{1,1}$ を共分散と呼ぶ。

また、不規則信号 $x(t)$ に対しては次のようになる。

$$x_i := x(t_i) \text{ のとき } p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \lim_{\Delta 1, \dots, \Delta n \rightarrow 0} \text{Prob.} \{ \forall i x_i \leq x(t_i) \leq x_i + \Delta i \} \quad (6.2.15)$$

6.2.3 不規則信号の統計量

$t = t_1$ において定義される統計量は下の通り

$$\text{集合平均} \quad E[x_i(t_1)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \quad (6.2.16)$$

ここで左辺に出てくる i は象徴としての i で、自由変項では無い！ t_1 において、 $x(t) = x_1$ となる pdf を $p(x_1, t_1)$ とすると、

$$E[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1, t_1) dx_1 \quad (6.2.17)$$

6.3 定常信号

6.3.1 定常信号の定義

信号は定常信号か、非定常信号に分類される。簡単には下のように定義できる。

定常信号 どの時点で観測しても、統計的性質が変わらない信号。例として音声信号（正確には母音）

非定常信号 上記で無い物。地震波とか？

定義 3 (定常信号) $\{x(t), -\infty < t < \infty\}$ において、任意の $n, \tau \in \mathbb{R}$ に対して、

$$p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = p_n(x_1, t_1 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau) \quad (6.3.1)$$

が成立するとき $x(t)$ は定常信号である。

ただし、実用上は十分大きな時間範囲に対して成り立てば良い。

また、これは確率密度集合が時間遷移に対して不変、あるいは確率密度関数は任意の時刻に対する $n-1$ 個の時間差分によって記述される。

次に、定常信号を細分化する概念を導入する。

強定常信号 狭義の定常信号ですべての確率密度信号が上の条件を満たす。

弱定常信号 1 次と 2 次の統計量のみが上の条件を満たす。

定義 4 (弱定常信号) $E[|x(t)|^2] < \infty$ で次が成り立つ $\{x(t)\}$ は弱定常信号である。

- 期待値 $E[x(t_1)] = m$ が t_1 に因らず一定
- 共分散 $E[\{x(t_1) - m\}\{x(t_2) - m\}]$ が $t_1 - t_2$ のみの関数になっている。よって $\varphi_x(t_1 - t_2)$ と表せる。

6.3.2 定常信号の時間平均

集合平均 確率集合に含まれる標本信号全体の平均

時間平均 1 つの標本信号の複数の観測時点における平均。なので定常信号ならば一定で、非定常信号の値は無意味。

これを式で表すと

$$\text{集合平均} \quad E[x(t_1)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \quad (6.3.2)$$

$$\text{時間平均} \quad \langle x(t) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M x(t_i) & \text{離散} \\ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt & \text{連続} \end{cases} \quad (6.3.3)$$

定常信号ならば時間平均の方が扱いやすい、というのは同じ実験で何度も同じ時刻の観測を繰り返すのが面倒だから。さて、時間平均が集合平均と等しい条件はエルゴード性という。

定義 5 (エルゴード信号 (ergodic signal)) 下を満たす不規則信号をエルゴード信号という。

- i). 強定常であり
- ii). 強定常な真部分確率集合を持たない

定理 4 (エルゴード定理) エルゴード信号では時間平均と集合平均が一致する。

仮説 1 (エルゴード仮説) 複雑な定常物理現象はエルゴード信号とみなしてよい。

注意 1 エルゴード理論はあくまで仮説であって未だに数学的証明は与えられていない。

7 相関関数とスペクトル

目的は不規則信号の二次統計量による解析

7.1 相関関数

同じ不規則信号もしくは 2 つの不規則信号において時刻 τ だけずれた信号の値がどれくらい似ているのか？

$$\varphi_x(\tau) \quad x(t) \text{ の自己相関関数} \quad (7.1.1)$$

$$\varphi_{xy}(\tau) \quad x(t) \text{ と } y(t) \text{ の相互相関関数} \quad (7.1.2)$$

7.1.1 2 変数の相関

$$\text{相関} \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (7.1.3)$$

7.1.2 二つの信号の相関

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (7.1.4)$$

$$= \frac{1}{T} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \Delta t \quad (7.1.5)$$

$$\xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \bar{x})(y(t) - \bar{y}) dt \quad (7.1.6)$$

7.1.3 自己相関関数 (autocorrelation function)

定義 6 $y(t) := x(t + \tau)$ として、

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt \quad (7.1.7)$$

$$= \langle x(t)x(t + \tau) \rangle \quad (7.1.8)$$

ただし、一般的な不規則信号は直流成分を含まないので $\bar{x} = 0$ とした。また、エルゴード信号の場合これが $E[x(t)x(t + \tau)]$ と一致する。

命題 3

$$\varphi_x(\tau) = \varphi_x(-\tau) \quad (7.1.9)$$

$$\varphi_x(0) = \langle x(t)^2 \rangle \quad (7.1.10)$$

$$\varphi_x(0) \geq |\varphi_x(\tau)| \quad (7.1.11)$$

証明.

$$\varphi_x(-\tau) = \langle x(t)x(t - \tau) \rangle \quad (7.1.12)$$

$$= \langle x(s + \tau)x(s) \rangle \quad (7.1.13)$$

$$= \varphi_x(\tau) \quad \because \text{時間に依存しない} \quad (7.1.14)$$

□

例 1 (正弦波)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (7.1.15)$$

$$\varphi_x(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle \quad (7.1.16)$$

$$= A^2 \langle \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega(t + \tau) + \theta) \rangle \quad (7.1.17)$$

$$= \frac{A^2}{2} \left\langle \underbrace{\cos(2\omega t + \omega\tau + \theta)}_{=0} + \cos \omega\tau \right\rangle \quad (7.1.18)$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau \quad (7.1.19)$$

例 2 (白色雑音)

$$\varphi_x(\tau) = k\delta(\tau) \quad (7.1.20)$$

他にも、一般的に山が定期的に表れる様な物は隠れた周期性のサインといえるし、グラフがとがっている場合は急な変動が、緩やかな変化の信号の場合は逆に自己相関関数はゆるやか。

7.1.4 相互相関関数 (cross-correlation function)

定義 7

$$\varphi_{xy}(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t+\tau) dt \quad (7.1.21)$$

$$= \langle x(t)y(t+\tau) \rangle \quad (7.1.22)$$

エルゴード信号なら集合平均に等しい。

命題 4 i). 必ずしも偶関数とは限らないが、

$$\varphi_{xy}(-\tau) = \varphi_{yx}\tau \quad (7.1.23)$$

が成り立つ。

ii).

$$|\varphi_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\varphi_x(0)\varphi_y(0)} \quad (7.1.24)$$

■ 使い方の例 入力 $x(t)$ に対して遅延 t_0 とノイズ $n(t)$ が働いた出力 $y(t)$ を考えると

$$y(t) = x(t - t_0) + n(t). \quad (7.1.25)$$

このとき、 x, y から t_0 を知りたい。

$$\varphi_{xy}(t) = \langle x(t) \{x(t - t_0 + \tau) + n(t + \tau)\} \rangle \quad (7.1.26)$$

$$= \langle x(t)x(t - t_0 + \tau) \rangle + \langle x(t)n(t + \tau) \rangle \quad (7.1.27)$$

$$= \langle x(t)x(t - t_0 + \tau) \rangle \quad \text{理想なノイズは } x \text{ と無相関} \quad (7.1.28)$$

$$= \varphi_x(\tau - t_0) \quad \text{自己相関} \quad (7.1.29)$$

これは自己相関関数を t_0 だけ平行したものなので、 $\varphi_{xy}(t)$ を求めて、ピークのある位置から t_0 が求まる。というわけで先の例で言うと入力 x が正弦波の場合はピークを読みづらいので白色雑音のような入力が望ましい。

i). $\bar{x} \neq 0, \bar{y} \neq 0$ のときに

$$\varphi_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad \text{自己相関関数} \quad (7.1.30)$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \langle x(t)y(t+\tau) \rangle \quad \text{相互相関関数} \quad (7.1.31)$$

$$\kappa_x(\tau) = \langle \{x(t) - \bar{x}\} \{x(t+\tau) - \bar{x}\} \rangle \quad \text{自己分散関数} \quad (7.1.32)$$

$$\kappa_{xy}(\tau) = \langle \{x(t) - \bar{x}\} \{y(t+\tau) - \bar{y}\} \rangle \quad \text{自己分散関数} \quad (7.1.33)$$

ii). 正規化が好きなコミュニティでは

$$\rho_x(\tau) = \frac{\varphi_x(\tau)}{\varphi_x(0)}, \quad \rho_{xy}(\tau) = \frac{\varphi_{xy}(\tau)}{\sqrt{\varphi_x(0)\varphi_y(0)}} \quad (7.1.34)$$

(7.1.35)

とすることでそれぞれを $[-1, 1]$ に収める。

7.2 電力スペクトル密度

■ 目的 不規則信号の周波数分布を知る。位相を無視して振幅のみに着目する。

定義 8 (電力スペクトル密度) 電力スペクトル密度を下のように定義する。

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[|X(f)|^2 \right] \quad (7.2.1)$$

周波数 f における振幅の二乗の微分。

命題 5 (電力スペクトル密度の性質)

$$\Phi_x(f) \geq 0 \quad (7.2.2)$$

$$\Phi_x(-f) = \Phi_x(f) \quad \text{偶関数} \quad (7.2.3)$$

波形の平均電力 P

$$P = E \left[\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt \right] \quad (7.2.4)$$

$$= E \left[\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \right] \quad \because \text{Parseval (4.3.2)} \quad (7.2.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} E \left[|X(f)|^2 \right] df \quad (7.2.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \Phi_x(f) df \quad (7.2.7)$$

注意 2 両側電力スペクトル密度と片側電力スペクトル密度というのがある。 $x(t) \in \mathbb{R}$ において $\Phi_x(f)$ が偶関数となるので、 $f \in (-\infty, \infty)$ で定義される両側電力スペクトル密度 $\tilde{\Phi}_x(f)$ を定義すると片側電力スペクトル密度 Φ_x は

$$\Phi_x(f) = 2\tilde{\Phi}_x(f). \quad (7.2.8)$$

定義 9 (相互スペクトル密度) 各周波数成分で見て二信号の相関を見るもの。 $X(f)$, $Y(f)$ について相互スペクトル密度 Φ_{xy} を次のように定義する。

$$\Phi_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [X^*(f)Y(f)] \quad (7.2.9)$$

$$\Phi_x(f) = \Phi_{xx}(f) \quad (7.2.10)$$

7.3 Wiener-Khinchine Theorem

定理 5 自己相関関数 $\phi_x(\tau)$ と電力スペクトル密度 $\Phi_x(f)$ は下の関係を満たす。

$$\varphi_x(\tau) \stackrel{\mathfrak{F}}{\underset{\mathfrak{F}^{-1}}{=}} \Phi_x(f) , \quad (7.3.1)$$

同様に

$$\varphi_{xy}(\tau) \stackrel{\mathfrak{F}}{\underset{\mathfrak{F}^{-1}}{=}} \Phi_{xy}(f) . \quad (7.3.2)$$

略称を下に示す。

証明.

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[|X(f)|^2 \right] \quad (7.3.3)$$

$$= \lim \frac{1}{T} E \left[\int_0^T x(t) e^{j2\pi f t} dt + \int_0^T x(t') e^{-j2\pi f t'} dt' \right] e \quad (7.3.4)$$

$$= \lim \frac{1}{T} \iint E [x(t)x(t')] e^{-j2\pi f(t'-t)} dt dt' \quad (7.3.5)$$

$\tau := -t + t'$ とすると、 $dt' = d\tau$

$$= \lim \frac{1}{T} \iint E [x(t)x(t+\tau)] e^{-j2\pi f \tau} dt d\tau \quad (7.3.6)$$

$$= \lim \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T dt}_{=1} \int_{-T}^T \varphi_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (7.3.7)$$

と変形でき、これは $\varphi_x(\tau)$ のフーリエ変換そのもの。(3.0.19) □

7.4 線形システムの応答

$x(t)$ から出力 $y(t)$ を求めるのはたたみ込み積分であったが、周波数領域で考えたとき

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (7.4.1)$$

が成り立つ。さて、電力スペクトル密度はどのような関係を示すのだろう。

定理 6

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2 \Phi_x(f) \quad (7.4.2)$$

$$\Phi_{xy}(f) = H(f)\Phi_x(f) \quad (7.4.3)$$

8 信号のベクトル表現とその統計的扱い

■ 目的 スカラー量である x, f を $\mathbf{x}, \mathbf{f}$ に拡張。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad p(\mathbf{x}) = p(x_1, \dots, x_n) \quad (8.0.4)$$

8.1 信号のベクトル表現の例

8.1.1 システムの状態値

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (8.1.1)$$

8.1.2 サンプリング

$t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_0 + (n-1)\Delta t$ に対するサンプルを $x_1, \dots, x_n$ ととる。

8.1.3 基本波形の展開

$$\tilde{x}(t) = \sum x_i \varphi_i(t) \quad (8.1.2)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (8.1.3)$$

この場合正弦波を φ_i に選べばフーリエ級数/変換となり、標本化関数 $\delta(t - t_i)$ とした場合はサンプリングとなる。

8.2 ベクトル信号の統計的性質の記述

定義 10 (ベクトル信号の統計量)

$$\text{確率密度関数} \quad p(\mathbf{x}) = p(x_1, \dots, x_n) \quad (8.2.1)$$

$$\text{統計量} \quad \mathbf{m} = \mathbf{E}[\mathbf{x}] \quad (8.2.2)$$

$$= \begin{bmatrix} E[x_1] \\ \vdots \\ E[x_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} \quad (8.2.3)$$

定義 11 (共分散行列 (covariance matrix)) 下で定義される Λ を共分散行列と呼ぶ。Wikipedia によるとどうも一般的には Σ と表記するようだが...

$$\sigma_{i,j} = E[(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)] \quad (8.2.4)$$

$$\Lambda = [\sigma_{i,j}] = \begin{bmatrix} \overline{\Delta x_1 \Delta x_1} & \cdots & \overline{\Delta x_1 \Delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\Delta x_n \Delta x_1} & \cdots & \overline{\Delta x_n \Delta x_n} \end{bmatrix} \quad (8.2.5)$$

$$= \mathbf{E}[(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T] \quad (8.2.6)$$

対角要素は見ての通り x_i の分散で、それ以外は各成分の相関になっている。

命題 6 (共分散行列の性質) 共分散行列は下の性質を満たす。

- i). $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ なら実対称列
- ii). Λ の固有値は負で無い実数
- iii). $\mathbf{x}$ の成分が互いに無相関なら

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (8.2.7)$$

8.3 多次元ガウス信号

定義 12 一次元のガウス関数が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.3.1)$$

これを拡張して

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Lambda_N|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right] \quad (8.3.2)$$

$p(\mathbf{x}) = \text{const.}$ のとき、分布がどうとか書いてあるが読めない。

また、 $\mathbf{x}$ が無相関のとき

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \prod \sigma_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum (x_i - \bar{x}_i)^2 / \sigma_i^2 \right] \quad (8.3.3)$$

$$= \prod p(x_i) \quad (8.3.4)$$

8.4 線形変換

■ 概要 入力 $\mathbf{y}$ として

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (8.4.1)$$

8.4.1 期待値ベクトル

定義 13

$$\mathbf{E}[\mathbf{y}] = \mathbf{E}[\mathbf{A}\mathbf{x}] = \mathbf{A}\mathbf{m} \quad (8.4.2)$$

8.4.2 共分散ベクトル

定義 14 以下で $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ とする。

$$\Lambda_y = \mathbf{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \quad (8.4.3)$$

$$= \mathbf{E}[\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T] \quad (8.4.4)$$

$$= \mathbf{A}\Lambda_x\mathbf{A}^T \quad (8.4.5)$$

8.4.3 カルーネル・レーベ変換 (Karhunen-Loeve Transformation)

互いに無相関な $y_1, \dots, y_n$ への変換を行いたい、即ち

$$\text{対角行列 } \Lambda_y = \mathbf{A}\Lambda_x\mathbf{A}^T \quad (8.4.6)$$

となるように行列 $\mathbf{A}$ を定める。このような対角化行列は

$$\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n) \quad (8.4.7)$$

$$\text{ただし } \mathbf{v}_i \text{ は } \Lambda_x \text{ の } i \text{ 番目の固有値に対応する固有ベクトル} \quad (8.4.8)$$

ただしこれには弱点が有って、変換行列が入力に依存するために符号化の際にオーバーヘッドが大きくなる。そのため固定的な変換が必要。例えば画像の場合は離散コサイン変換 (Discrete Cosine Transform, DCT) といわれる変換方式が MPEG 等で用いられている。

8.4.4 離散フーリエ変換

$$\begin{bmatrix} X_0(f) \\ \vdots \\ X_{N-1}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ w_N^{kn} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \end{bmatrix} \quad (8.4.9)$$

$$\mathbf{f} = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \quad (8.4.10)$$

$$X_k(f) = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} x_n \quad (8.4.11)$$

ただし $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$