

数学 3

Kiz

2010 年 1 月 22 日

目次

1	確率論へのアプローチ	2
1.1	古典的定義	2
1.2	統計的定義	2
2	確率の公理的定義	3
2.1	確率関数	3
2.2	完全加法族	3
2.3	測度と確率	4
3	確率に関する色々	6
3.1	順列、組み合わせ等	6
3.2	条件付き確率	9
3.3	事象の独立性	11
3.4	ベイズの定理	13
4	確率変数と確率分布	15
4.1	確率変数の導出	15
4.2	確率密度関数	16
4.3	累積分布関数	16
4.4	確率変数の関係	20
4.5	確率変数の独立性	21
4.6	平均と分散	22
4.7	確率変数の収束	34
5	ランダムウォーク	40
5.1	単純ランダムウォーク	40

5.2	対称単純ランダムウォーク	41
5.3	マルチンゲール	42
5.4	ブラウン運動	46

概要

確率入門である。

参考文献

『入門確率過程』松原 望, 東京圖書

1 確率論へのアプローチ

古典的定義 コイン、サイコロなど同程度の慥からしさの起こる事象を假定してそこから組み立てる。

統計的定義 頻度を用ゐて定義する。

公理的定義 コルモゴロフ：現代の確率論の數學的基礎を與へた。

1.1 古典的定義

定義 1 (確率の古典的定義)

同程度に起こり得る全體の場合の數に對するある事象の起こりうる場合の數の比をある事象の起こりうる確率とする。

例 1 (2 つのサイコロを振る)

2 つのサイコロの目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
起こる場合の數	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

表 1 2 つのサイコロの目の和に關する確率

1.2 統計的定義

觀測結果から確率を數量的に定義する。

定義 2 (確率の統計的定義)

n 回獨立した試行を行ふときに偶然事象 A が m 回起こる。十分大きい試行回數 (n) に對して、 A

の頻度 $\frac{m}{n} \sim A$ の起こる確率 $P(A)$

背景にはベルヌーイの定理で頻度の統計安定性がある。

定理 1 (ベルヌーイの定理)

頻度の確率からのづれは一般に n が大きくなると小さくなる。

2 確率の公理的定義

2.1 確率関数

定義 3 (確率の公理的定義)

與へられた実験によつて決まるすべての事象の集合の上で定義される数値関数 $P(A)$ で次の性質を持つもの。

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (2.1.1)$$

$$P(A) = 1 \quad A \text{ は確実に起こる事象} \quad (2.1.2)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{ただし } A \cap B = \emptyset \quad (2.1.3)$$

こゝで考へて欲しいのは、この関数が定義域を $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ でなく、集合として取つてゐるといふこと。なので

1. 事象 = 定義域
2. 確率関数の性質

をそれぞれ區別して丁寧に考へること。

1 の定義域に對しては完全加法族 (σ 加法族) であることが、2 の確率に對しては直感的な性質を盛り込む。

2.2 完全加法族

定義 4 (加法族)

集合 Ω の部分集合の族 $\mathcal{A}$ が加法族であるとは、 $\mathcal{A}$ が次の 3 つの條件を満たすことを言ふ。

$$\Omega \in \mathcal{A}, \emptyset \in \mathcal{A} \quad (2.2.1)$$

$$A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A} \quad (2.2.2)$$

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A} \quad (2.2.3)$$

定義 5 (σ 加法族)

Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が σ 加法族であるとは、 $\mathcal{F}$ が加法族で、かつ (2.2.3) より強い次の式を満たす。

すことである。

$$A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, 3, \dots) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad (2.2.4)$$

例 2 (加法族の例)

以下のものは σ 加法族である。

- 2 個の集合 $\{\Omega, \emptyset\}$ は Ω の自明な σ 加法族である。
- また、 Ω のすべての部分集合のなす族 2^Ω は Ω の最大の σ 加法族。
- $A \in \Omega$ で $A \neq \emptyset, A \neq \Omega$ とすると、 $\{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ は σ 加法族。
- $\Omega = \mathbb{R}$ とおき、 $\mathcal{A}$ を左開右閉区間 $(a, b]$ の和集合として表せるやうな $\Omega = \mathbb{R}$ の部分集合の全集合からなる族とすると $\mathcal{A}$ は σ 加法族。

定義 6

Ω の部分集合の族 $\mathcal{U}$ がある時この $\mathcal{U}$ を含む σ 加法族で最小のものを $\mathcal{U}$ の定める σ 加法族 $\sigma(\mathcal{U})$ とする。

例 3

$\Omega = \mathbb{R}$ の時 $\mathbb{R}$ のすべての開区間の族の定める σ 加法族をボレル集合族と呼ぶ。

定義 7

Ω とその部分集合の σ 加法族 $\mathcal{F}$ が与えられたとき、 $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間と呼ぶ。確率=長さ=測度

2.3 測度と確率

定義 8 (測度)

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする。こゝで $\mathcal{F}$ を定義域とする実数関数 μ が以下の性質を満たすとき、 μ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度といふ。

すべての $E \in \mathcal{F}$ について

$$0 \leq \mu(E) \quad (2.3.1)$$

$E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ かつ $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$ のとき、

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad (2.3.2)$$

面積とかイメージすれば、まあ重ならないものゝ面積を別々に計つてもいいゝでせううつて思ふよね。

定義 9 (確率)

$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 P が $P(\Omega) = 1$ を満たすとき、 P を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度といひ、 $P(E)$ を E の確率といふ。また、この時 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間といふ。

前回の授業で確率が規格化された長さ、精確には集合を測るために導入された測度であることがわかった。こゝで期待値などは積分と考へられる。

例 4 (期待値とは)

テストの成績が次の様であつたとする。

点数	8 点	4 点	2 点
人数	5 人	20 人	10 人

この時の期待値 E は

$$E = \frac{(8 \times 5) + (4 \times 20) + (2 \times 10)}{35} \quad (2.3.3)$$

これつて、面積だよな！

測度に関して詳しく知りたい場合は「ルベーグ積分超入門」(森眞, 共立出版) を。

定義 10 (確率空間)

確率空間 $(\Sigma, \mathcal{F}, P)$ は以下を満たす。

$$P(\emptyset) = 0 \quad (2.3.4)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad (2.3.5)$$

$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ ならば

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (2.3.6)$$

$A, B \in \mathcal{F}$ に對して $A \subset B$ なら

$$0 \leq P(A) \leq P(B) \quad (2.3.7)$$

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \in \mathcal{F}$ で、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$ とすると $A \in \mathcal{F}$ であり、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i) = P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad (2.3.8)$$

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \in \mathcal{F}$ で、 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$ とすると $A \in \mathcal{F}$ であり、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i) = P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad (2.3.9)$$

補足 1 (確率論でよく使はれる言葉)

確率論で用ゐられる用語には以下のやうなものがある。

実験 これから確率を求める観察の場。コイン実験など。

試行 実験の中での操作。コインを投げる、サイコロを振るなど。

標識

根元事象 試行の結果 $\omega \in \Omega$ への対応。サイコロ投げ一つ取つても次の様な根元事象がある。

- 江戸の賭博では $\Omega = \{\text{丁}, \text{半}\}$
- 雙六では $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

それぞれの ω を根元事象といふ。これにあたり

1. Ω のいずれの点にも対応しないやうな事象は起きない。上の例でいへばサイコロが机に突き刺さつたりはしないわけだ。
2. Ω の二つ以上の点が対応するやうな事象も起きない。サイコロが斜めに立つて二つ以上の目が出ることはない。
3. Ω の中には現象に対応しない点があつてもいい。サイコロの目の例でいへば7の目が出ると言ふ事象を考へてもいいわけですね。

偶然事象 根元事象の任意の集合。この集合の σ 加法族を $\mathcal{F}$ 、また σ 加法族の要素を可測集合といふ。

一般に確率の具体的な問題は定められた実験の指標の結果を標識化して、根元事象に確率を導入しこれから偶然事象の起こる確率を求める。つまり、根元事象の確率が分からないとどうしようもない！

3 確率に関する色々

3.1 順列、組み合わせ等

1. n 個の要素の並び方は

$$n! \quad (3.1.1)$$

2. n 個の要素の戻しのない k 個抜き出での並び方は

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3.1.2)$$

3. n 個の要素の戻しのある k 個の抜き出しでの並び方は

$$n^k \quad (3.1.3)$$

4. n 個の要素の戻しのない k 個の抜き出し方は

$${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (3.1.4)$$

5. n 個の要素の戻しのある k 個の抜き出し方は

$${}_nH_k = {}_{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (3.1.5)$$

定理 2 (二項定理)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (3.1.6)$$

例 5

それぞれ区別できない a 個の赤玉と b 個の黒玉を一行に並べる並び方の場合の数は

$$\binom{a+b}{a} \quad (3.1.7)$$

例 6

k 個の箱に n 個の区別できない玉を入れる方法 (1 つも玉が入らない箱があつてもよい) は

$${}_{n+k-1}C_n = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1} = {}_{n+k-1}C_{k-1}. \quad (3.1.8)$$

これは n 個の玉と $k-1$ 個の仕切りを並べると考えればよい。

また、 n 個の区別できる要素を戻しなく k 個のグループに分ける方法

$$(n_1, n_2, \dots, n_k) \quad \sum_{i=1}^k n_i = n \quad (3.1.9)$$

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n_k}{n_k} \quad (3.1.10)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} \quad (3.1.11)$$

例 7

20 人のメンバーを (8 人, 8 人, 4 人) の 3 つの委員会に分ける。

$$\binom{20}{8, 8, 4} = \frac{20!}{8! 8! 4!} = 62,355,150 \quad (3.1.12)$$

定理 3 (スターリングの公式)

十分大きい n に對して、

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(e^{-n}n^n) \quad (3.1.13)$$

の近似が成り立つ。

例 8

箱の中にそれぞれ區別できない n_1 個の赤玉、 n_2 個の黒玉が入つてゐて、 $n_1 + n_2 = n$ とする。この中から無作為に r 個を取り出した中にちやうど k 個の赤玉が含まれてゐる確率を q_k とすると、

$$q_k = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{r-k}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{n_1-k}}{\binom{n}{n_1}} \quad (3.1.14)$$

n 匹の魚のうち $n_1 = 1000$ 匹赤く塗る。一旦放して、もう一度 $r = 1000$ 匹捕まへたときに、その中に $k = 100$ 匹赤い金魚がゐた。

$$L(n) \equiv \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}} \quad (3.1.15)$$

具體的に代入してみると

$$L(n) = \frac{\binom{1000}{100} \binom{n-1000}{1000-100}}{\binom{n}{1000}} \quad (3.1.16)$$

$$= \frac{1000!}{100! 900!} \frac{(n-1000)!}{900! (n-1900)!} \frac{1000! (n-1000)!}{n!} \quad (3.1.17)$$

$$= \frac{\{1000! (n-1000)!\}^2}{n! (n-1900)! 100! (900!)^2} \quad (3.1.18)$$

$$= \frac{(1000 \cdot 999 \cdots 901)^2 \cdot (n-1000) \cdots (n-1899)}{n \cdot (n-1) \cdots (n-999) \cdot 100!} \quad (3.1.19)$$

$$= \prod_{i=1}^{100} \frac{i+900}{i} \cdot \prod_{i=1}^{900} \frac{(n'+i) \cdot (900+i)}{n'+900+i}$$

■誕生日の問題 次のやうな問題を考へる。

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
人数	9	4	11	11	7	7	6	8	8	18	9	14	112
二人一致	1	0	0	2	1	1	0	0	0	3	0	1	9
三人一致	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

n 人のグループの中で少なくとも 2 人が同じ誕生日を持つ確率は？

n 人のすべての誕生日の場合の数

$$Y^n = 365^n \quad (3.1.20)$$

皆が違ふ誕生日の場合

$${}_Y C_n = {}_{365} C_n \quad (3.1.21)$$

求める確率

$$P_d(n) = \frac{Y^n - {}_{365} C_n}{Y^n} \quad (3.1.22)$$

3.2 条件付き確率

定義 11 (条件付き確率)

ある一定の情報が事前に與へられた上で事前の確率を求める情況や必要がある事象 B が起きたとき事象 A が起きる確率。

例 9 1. 熱が 40 度の時インフルエンザである確率。

2. サイコロの目が偶数の時 3 より大きい確率。

定義 12 (同時確率)

全體が n 通り、事象 B が m 通り、 $A \cap B$ が k 通りあるとき、同時確率 $P(A \cap B) \equiv P(AB)$ を A と B が共に起きる確率 (時間的な順序の話をしてゐる譯ではない)。

$$P(B) = \frac{m}{n}, \quad P(A \cap B) = \frac{k}{n} \quad (3.2.1)$$

B が起きたといふ条件の元で事象 A が起こる条件付き確率は

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{k}{m} \quad (3.2.2)$$

命題 1 (条件付き確率の性質)

$$0 \leq P(A | B) \leq 1 \quad (3.2.3)$$

$$A \cup B = \emptyset \implies P(A | B) = 0 \quad (3.2.4)$$

$$B \subset A \implies P(A | B) = 1 \quad (3.2.5)$$

$C = A \cup B$ かつ $A \cap B = \emptyset$ の時

$$\forall D P(A | D) + P(B | D) = P(C | D) \quad (3.2.6)$$

これを擴張して、

$$A = \bigcup_{i=1}^K A_i \text{ かつ } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ なら}$$

$$P(A | D) = P(A_1 | D) + \cdots + P(A_K | D) \quad (3.2.7)$$

$$P(A^c | B) = 1 - P(A | B) \quad (3.2.8)$$

例 10

2つのサイコロを轉がして和 T が奇数の時、 $T < 8$ である確率は？

事象 B : T が奇数

事象 A : $T < 8$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad (3.2.9)$$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad (3.2.10)$$

$$\therefore P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \quad (3.2.11)$$

T が $T = 7$ か $T = 8$ になるまで振り續ける。これが終了したとき $T = 7$ である確率は？

事象 B : $T = 7 \text{ or } 8$

事象 A : $T = 7$

$$P(B) = \frac{11}{36} \quad (3.2.12)$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} \quad (3.2.13)$$

$$\therefore P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{11} \quad (3.2.14)$$

つぼの問題

あるツボの中に r 個の赤い球と b 個の黒い球がある。これをランダムに取り出しその色を確認してツボに戻しかつその色と同じ色の球を 1 個追加する。

1 回目に赤を抜き出す確率

$$P(r) = \frac{r}{b+r} \quad (3.2.15)$$

1 回目、2 回目と續けて赤がでる確率

$$P(rr) = \left(\frac{r}{b+r} \right) \left(\frac{r+1}{b+r+1} \right) \quad (3.2.16)$$

1 回目に赤が出て 2 回目に赤がでる条件付き確率

$$P(r | r) = \frac{P(rr)}{P(r)} = \left(\frac{r+1}{b+r+1} \right) > \frac{r}{b+r} = P(r) \quad (3.2.17)$$

むろん球を入れたから確率が變はつた譯だ。条件付き確率は物理的情况に影響される。

2 つのつぼ

まづ 1 つのツボをある確率で選んでそこから n 回の取り出しを行ひ、球は戻すが追加とかはし

ない。

$$P(r) = \frac{1}{6} \left(\frac{r_1}{b_1 + r_1} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{r_2}{b_2 + r_2} \right) \quad (3.2.18)$$

$$P(rr) = \frac{1}{6} \left(\frac{r_1}{b_1 + r_1} \right)^2 + \frac{5}{6} \left(\frac{r_2}{b_2 + r_2} \right)^2 \quad (3.2.19)$$

$$P(r | r) = \frac{P(rr)}{P(r)} \neq P(r) \quad (3.2.20)$$

この場合物理的状況の變化がないのに条件付き確率がこの確率と變化した。

3.3 事象の独立性

定義 13 (独立性)

$$\text{事象 } A \text{ と } B \text{ は確率的に獨立である} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (3.3.1)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)(P(B) \neq 0) \quad (3.3.2)$$

注意 1

「物理的に獨立である」 $\implies$ 「確率的に獨立である」は往々にして成り立つが、逆は成り立たない。

例 11

サイコロを 1 回振つて出た目 T について下のやうなことを考へる。

$$A : T = 1, 3, 5 \quad (3.3.3)$$

$$B : T = 1, 2, 3, 4 \quad (3.3.4)$$

$$A \cap B = \{1, 3\} \quad (3.3.5)$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{3} \quad (3.3.6)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \quad (3.3.7)$$

この時、事象 B を $T = 1, 2, 3$ とすると A と B は確率的には獨立でなくなる。この様に確率的獨立からは物理的獨立を言へない。また、量子力學を考へると物理的獨立も危ふくなる。量子トンネル効果でポテンシャルの壁を二つ竝べる。一つ目で 10% になる場合は二つ目通つたら 1% だらう、と思ふけれども實は二つ合わせて考へてやらなくちやダメで量子トンネル共鳴、非局所性が明かになる。例へば二つ通つたら 100% になることだつてある。

例 12

3 人の子供がある家庭にゐる。性別については等確率で男女がゐるとするとありえる情態はしたの

通り。

$$(b, b, b), (b, b, g), (b, g, b), (g, b, b) \quad (3.3.8)$$

$$(g, g, b), (g, b, g), (b, g, g), (g, g, g) \quad (3.3.9)$$

$$\text{事象 } A : \text{多くとも 1 人の女の子} \quad \text{—4 通り} \quad (3.3.10)$$

$$\text{事象 } B : \text{男の子と女の子両方} \quad \text{—6 通り} \quad (3.3.11)$$

$$\text{事象 } A \cap B : \text{男の子 2 女の子 1} \quad \text{—3 通り} \quad (3.3.12)$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad (3.3.13)$$

$$P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad (3.3.14)$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A)P(B) \quad (3.3.15)$$

ゆゑに事象 A, B は統計的に独立。

補足 2 (3 つ以上の事象における確率的独立)

どの 2 つのペアも独立である場合は 2 つづゝ独立。

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (\forall i \neq j). \quad (3.3.16)$$

例 13 (正四面體サイコロ)

3 つの面は赤青緑の三色で塗つたとする。1 つの面は 3 色で塗られてゐる。このサイコロを一回轉がして r, g, b が出る確率はそれぞれ

$$P(r) = P(g) = P(b) = \frac{1}{2} \quad (3.3.17)$$

$$P(rb) = P(rg) = P(gb) = \frac{1}{2} \quad (3.3.18)$$

$$P(rb) = P(r)P(b) \quad (3.3.19)$$

$$P(rg) = P(r)P(g) \quad (3.3.20)$$

$$P(gb) = P(g)P(b) \quad (3.3.21)$$

$$P(rgb) = \frac{1}{4} \neq P(r)P(g)P(b) = \frac{1}{8} \quad (3.3.22)$$

より一般には、完全に独立とはどの部分集合も確率的に独立である。 $1 \leq i \leq j \leq k \leq \dots \leq n$ のすべての組み合わせについて、

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (3.3.23)$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \quad (3.3.24)$$

⋮

$$P(A_i A_j A_k \dots A_n) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \dots P(A_n) \quad (3.3.25)$$

3.4 ベイズの定理

定理 4 (確率の乗法定理)

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A) \quad (3.4.1)$$

定理 5 (全確率の公式)

事象 $B_1, B_2, \dots, B_n$ において以下が成り立つとする。

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad \text{互いに排反} \quad (3.4.2)$$

$$P(B_i) > 0 \quad \forall i \quad (3.4.3)$$

$$A \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \quad (3.4.4)$$

このとき

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n) \quad (3.4.5)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(AB_i) \quad (3.4.6)$$

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i) \quad (3.4.7)$$

定理 6 (ベイズの定理)

事象 $B_1, B_2, \dots, B_n$ が定理 5 の条件を満たすとする。このとき、

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)} \quad (3.4.8)$$

事象 A が起きたとき、事象 B_j の起きる条件付き確率が、 A が起きる前の確率 $P(B_j)$ と関係づけられる。つまり事故 A から原因 B_j を推測する。往々にして

1. $P(A | B_j)$ は (実験などで) 分かっている。
2. もし $P(B_j)$ が分かれば、ベイズの定理を適用できる。たゞし、必ずしも $P(B_j)$ は分かるわけではないので、これを適切に推測して決めることも多い。

例 14

工場の I, II, III で同じ部品を作る。製造量の割合は 0.2, 0.3, 0.5 である。それぞれの工場での不良の発生率は 0.05, 0.01, 0.06 である。

1. 生産された部品を 1 つ取り出したときこれが不良の確率？
工場 I, II, III で作られたといふ事象をそれぞれ B_I, B_{II}, B_{III} とすると、 $P(B_I) = 0.2, P(B_{II}) = 0.3, P(B_{III}) = 0.5$

また事象 A を部品が不良であると言ふ事象と定めると、全確率の公式より

$$P(A) = P(A | B_I)P(B_I) + P(A | B_{II})P(B_{II}) + P(A | B_{III})P(B_{III}) \quad (3.4.9)$$

$$= 0.043 \quad (3.4.10)$$

2. 上記の設定で、取り出した部品が不良であつたとき、これが工場 I, II, III で作られた確率は？

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{P(A)} \quad (3.4.11)$$

例 15

A 君が講義にくる確率 0.8

A 君が来て B 君もくる確率 0.7

A 君がこないで B 君がくる確率 0.1

このとき、

1. B 君がくる確率
2. B 君が来てみたとき A 君も来てゐる確率

事象 a : A 君くる

事象 b : A 君くる

$$P(a) = 0.8 \quad (3.4.12)$$

$$P(b | a) = 0.7 \quad P(b | a^c) = 0.1 \quad (3.4.13)$$

$$\therefore P(b^c | a) = 0.3 \quad P(b^c | a^c) = 0.9 \quad (3.4.14)$$

$$P(b) = P(b | a)P(a) + P(b | a^c)P(a^c) \quad (3.4.15)$$

$$= 0.7 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.58 \quad (3.4.16)$$

$$P(a | b) = \frac{P(b | a)P(a)}{P(b)} \sim 0.966 \quad (3.4.17)$$

例 16

空港の液體検知装置は 95% の精度である。また、実際に手荷物に液體を入れてゐる人の割合は 0.01 である。ある時この装置が鳴つたが、この時手荷物の中に液體が入つてゐる確率はどれだ

けか。

A : 手荷物に液体が入つてゐる

B : 装置が鳴る

$$P(A) = 0.01 \quad (3.4.18)$$

$$P(B | A) = 0.95 \quad (3.4.19)$$

$$P(B | A^c) = 0.05 \quad (3.4.20)$$

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B | A)P(A) + P(B | A^c)P(A^c)} \quad (3.4.21)$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.01}{(0.95 \cdot 0.01) + (0.05 \cdot 0.99)} \quad (3.4.22)$$

$$\sim 0.161 \quad (3.4.23)$$

つまり、95% の機械が 20% も正解できない。稀な事象の検査には注意が必要だ。今回の例では精度をどういふ情態の元で計測したかが問題になる。

4 確率変数と確率分布

4.1 確率変数の導出

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考へる。確率変数は $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の寫像だ。 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P^*)$ への變換を考へる。

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.1.1)$$

$$: \omega \mapsto X(\omega) \quad (4.1.2)$$

任意の $B \subset \mathcal{B}$ について以下を満たす。

$$E = X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad (4.1.3)$$

P^* は X が従ふ確率で、 $x = X(\omega)$ とすると、 x が B に含まれる確率は ω が集合 $E = X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ に含まれる確率で

$$P^*(B) = P(X^{-1}(B)) \quad (4.1.4)$$

補足 3 (なぜ確率変数を使ふのか)

確率変数を使ふ理由は

1. 數値化した方が扱ひやすい。
2. 往々にして $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のある側面のみ考へたい。
3. 一つの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から複數の變数を考へてそれらの關係を知りたい。

例 17

コインを 10 回投げて、表が出る事象 H, 裡を T とすると、

$$\Omega = \{ HTH \dots H, TT \dots H, \dots \} \quad 2^{10} \text{ 個の要素} \quad (4.1.5)$$

1. X を表のでる回数とし、 $X : \Omega \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}$ とすると

$$\Omega' = \{0, 1, 2, \dots, 10\} \quad 11 \text{ 個の要素} \quad (4.1.6)$$

2. $Y = (\text{表のでる数}) - (\text{裡のでる数}) : \Omega \rightarrow \Omega''$

$$\Omega'' = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 10\} \quad 11 \text{ 個の要素} \quad (4.1.7)$$

4.2 確率密度関数**4.2.1 定義**

実数 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ で以下の性質を持つ。

1. 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) \geq 0$
2. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について集合 $A = \{x \mid a < x < b\}$ を考えると、

$$\int_A f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (4.2.1)$$

が有限で確定する。

- 3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (4.2.2)$$

4. A の中のいずれかの要素が生じる確率が

$$P(A) = \int_A f(x) dx \text{ と定義できる。} \quad (4.2.3)$$

しかし、積分で確率を定義するとある 1 点のでの確率は 0 となつてしまふ。例へば可算集合の確率は 0。このため離散的な集合の上で考へられた確率を $\mathbb{R}$ 上でも扱へるやうに確率分布の概念を擴張する。こゝでディラックの超関数 $\delta(x)$ をもちゐる。 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$. これを用ゐると、例へば自然数上の確率密度関数を実数上に定義できる。通常確率分布に $\delta(x)$ を含めて擴張された確率分布と言ふ。

4.3 累積分布関数

確率変数がある閾値以下の値をとる確率。本當は密度ぢやないんだけど。

定義 14 (累積分布 (関数))

実数上で確率密度関数が与えられたとき、 $P(X \leq a)$ を累積分布 (確率) と呼び、以下で定義する。

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad (4.3.1)$$

命題 2 (累積分布の性質)

累積分布 $F(a)$ は次を満たす。

1.

$$0 \leq F(a) \leq 1 \quad (4.3.2)$$

2.

$$F(-\infty) = 0 \quad (4.3.3)$$

$$F(+\infty) = 1 \quad (4.3.4)$$

3. 単調で非減少関数である。

証明. 累積分布で $a \rightarrow x$ と置き換えて、

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' \quad (4.3.5)$$

これより $F(x)$ が微分可能な場合

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad \text{確率密度関数} \quad (4.3.6)$$

$f(x) \geq 0$ 故に単調非減少関数。 □

たゞ、離散型の時は普通には微分不可能だから注意が必要で、閾値関数 θ を用ゐれば

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (4.3.7)$$

を用ゐて表現出来るから、 $\delta(x)$ を $\theta(x)$ の微分 と表現すれば離散的な場合にも適用できる。

4.3.1 確率分布の例

■連続の場合

例 18 (一様分布)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4.3.8)$$

これは区間 $[a, b]$ 上の一様分布と呼ばれる。もし $A = [0.1, 0.5]$ が区間 $[a, b]$ に含まれてゐれば、

$$P(A) = \int_{0.1}^{0.5} \frac{1}{b-a} dx = \frac{0.4}{b-a} \quad (4.3.9)$$

例 19 (正規分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.3.10)$$

これは平均 m 、分散 σ^2 の正規分布で、 $N(m, \sigma^2)$ と表す。

$m = 0$, $\sigma = 1$ すなはち $N(0, 1)$ の場合を標準正規分布

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4.3.11)$$

こゝで

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad (4.3.12)$$

を用ゐると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 dx = 1 \quad (4.3.13)$$

であることが言へる。

例 20 (指数分布)

非負の実数 $[0, \infty)$ 上で、

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (4.3.14)$$

■ 離散の場合

例 21 (二項分布)

コインを投げて 2 つの結果 T, H の出る確率分布 $B_i(n, p)$ 。

$$P(T) = p \quad P(H) = 1 - p \quad (4.3.15)$$

n 回の試行で T の起きる回数 X は

$$P(X = x) = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (4.3.16)$$

例 22 (ポアソン分布)

$P_o(\lambda)$ で表される。

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.3.17)$$

二項分布とポアソン分布の間には密接な関係がある。

定理 7 (ポアソンの定理)

$$n \rightarrow \infty \quad p(n) \rightarrow 0 \quad np(n) \rightarrow \lambda \quad (4.3.18)$$

となるなら任意の m に対して

$$B_i(n, p) \equiv P_n(m) = {}_nC_m p^m (1-p)^{n-m} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \quad (4.3.19)$$

証明.

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{1-p} \quad (4.3.20)$$

$$\frac{P_n(k)}{P_n(0)} = \frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} \cdot \frac{P_n(k-1)}{P_n(k-2)} \cdots \frac{P_n(2)}{P_n(1)} \cdot \frac{P_n(1)}{P_n(0)} = \prod_{m=0}^{N-1} \frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} \quad (4.3.21)$$

こゝで

$$P_n(0) = (1-p)^n \quad (4.3.22)$$

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n(1-\frac{m}{n})p}{(m+1)(1-p)} = \frac{np(1-\frac{m}{n})}{(m+1)(1-p)} \quad (4.3.23)$$

$$\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \quad (4.3.24)$$

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \left(\frac{\lambda}{m+1} \right) \left(\frac{1-\frac{m}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}} \right) \quad (4.3.25)$$

$$\sim \frac{\lambda}{m+1} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.3.26)$$

さらに

$$P_n(0) = (1-p)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \quad (4.3.27)$$

$$\sim e^{-\lambda} \quad \because \text{one of definition of } e \quad (4.3.28)$$

$$\frac{P_n(k)}{P_n(0)} \sim \prod_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda}{m+1} = \frac{\lambda^k}{k!} \quad (4.3.29)$$

$$P_n(k) \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (4.3.30)$$

□

例 23

500 人中 k 人がある決められた日に生まれる確率は？

$$p = \frac{1}{365} \quad (4.3.31)$$

$$P_{500}(k) = {}_{500}C_k \left(\frac{1}{365} \right)^k \left(\frac{364}{365} \right)^{500-k} \quad (4.3.32)$$

こゝで $\lambda = \frac{500}{365}$ として

$$P_o(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (4.3.33)$$

	0	1	6
$P_{500}(k)$	0.2537	0.3484	0.0023
$P_o(l)$	0.2541	0.3481	0.0023

命題 3

同じ確率変数なら同じ確率分布を持つが同じ確率分布だからと言つて同じ確率変数とは限らない。
サイコロの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ として

1.

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \text{ が奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (4.3.34)$$

$$X : \Omega \rightarrow \Omega^\dagger \text{ で、 } \Omega^\dagger = \{0, 1\}$$

2.

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \leq 3) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (4.3.35)$$

$$Y : \Omega \rightarrow \Omega^\ddagger \quad (4.3.36)$$

$$\Omega^\ddagger = \{0, 1\} \quad (4.3.37)$$

の二つの変数を考えると、 $\omega = 2$ などと同じ値を取らないやうに同じ値を取らない場合があるが、しかし同じ確率分布に従つてゐる。これを X, Y は同じ法則（分布）に従ふといふ。

4.4 確率変数の関係

4.4.1 2つの変数による密度分布

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ と 2つの確率変数 X, Y を考える。

定義 15 (同時確率密度関数)

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A で $(x, y) \in A$ となる確率を $P(A)$ とする。

$$P(A) = \iint_A p(x, y) dx dy \quad (4.4.1)$$

となる $p(x, y)$ が存在するとき、これを同時確率密度関数と言ふ。

定義 16 (周辺確率密度関数)

$U \in \mathbb{R}, A = U \times (-\infty, \infty) \in \mathbb{R}^2$ として

$$P(A) = \int_u \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy \quad (4.4.2)$$

これは $x \in U$ に入つてゐる確率に等しいので、 X の確率密度関数を $P(x)$ とするとき、

$$\int_u P(x) dx = \int_u \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy \quad (4.4.3)$$

これより

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad (4.4.4)$$

同様の議論で

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \quad (4.4.5)$$

このため、 $p(x)$, $p(y)$ を周辺確率分布 (密度関数) といふ。

4.5 確率変数の独立性

定義 17 (独立性)

以下のやうに確率変数の独立を定義する。

$$2 \text{ つの確率変数 } X, Y \text{ が独立} \stackrel{\text{def}}{\iff} p(x, y) = p(x)p(y) \quad (4.5.1)$$

$$\text{確率変数 } X_1, \dots, X_n \text{ が独立} \stackrel{\text{def}}{\iff} p(x_1, \dots, x_n) = \prod_i p(x_i) \quad (4.5.2)$$

命題 4 (独立変数の和の確率)

$\Omega = \{0, 1\}$ の上に値を取る独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を考へる。これらのそれぞれの確率は皆等しく次で與へられるとする。

$$q(x_i = 1) = a \quad q(x_i = 0) = 1 - a \quad (0 < a < 1) \quad (4.5.3)$$

独立性から同時確率密度関数は

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = q(X_1)q(X_2) \cdots q(X_n) \quad (4.5.4)$$

次に、 $\Omega^* = \{0, 1, \dots, n\}$ とする。確率変数 X を、 X_i の和と定義すると、この Ω^* 上の値を取る。

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (4.5.5)$$

すると

$$P^*(X = k) = {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} \quad (4.5.6)$$

となり、 X は二項分布に従ふ。

命題 5

實数を値域とする 2 つの独立な確率変数 X, Y を考へる。それぞれは $p(x), q(y)$ の確率密度函数に従ふとする。この時、和 $Z = X + Y$ が従ふ確率密度函数 $r(z)$ を求める。

$$P(z \in A) = \int_{z \in A} r(z) dz = \iint_{x+y \in A} p(x)q(y) dx dy \quad (4.5.7)$$

$$= \int_{z' \in A} dz' \int_{-\infty}^{\infty} p(z' - y)q(y) dy \quad (z' = x + y) \quad (4.5.8)$$

上記の 2 式より

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z - y)q(y) dy \quad (4.5.9)$$

この式の右邊を $p(x)$ と $q(y)$ の畳み込みといふ。

例 24 (二項分布)

X, Y がそれぞれ $B_i(n, p), B_i(m, p)$ に従ふとき、 $X + Y$ は $B_i(n + m, p)$ に従ふ。

例 25 (ポアソン分布)

X, Y がそれぞれ $P_o(\lambda), P_o(\mu)$ に従ふとき、 $X + Y$ は $P_o(\lambda + \mu)$ に従ふ。

例 26 (正規分布)

X, Y がそれぞれ $N(m_1, \sigma_1^2), N(m_2, \sigma_2^2)$ に従ふとき、 $X + Y$ は $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従ふ。

4.6 平均と分散

4.6.1 平均

實數に値を取る X と確率分布 $p(x)$ に對して函数 $f(x)$ を考へる。

定義 18 (平均値 (期待値))

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x) dx \quad (4.6.1)$$

4.6.2 分散

定義 19 (分散)

 $m = E[f(x)]$ とすると、

$$V[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - m)^2 p(x) dx \quad (4.6.2)$$

ちなみに、平均も分散も有限でないときは定義されない。

命題 6

$$V[f(x)] = E[(f(x))^2] - (E[f(x)])^2 \quad (4.6.3)$$

4.6.3 標準偏差

定義 20 (標準偏差)

$$\sigma[f(x)] = \sqrt{V[f(x)]} \quad (4.6.4)$$

例 27

 n 面サイコロ : $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ $p = \frac{1}{n}$ で、 X がどの値を取る確率も等しい。

$$E[X] = \sum_{i=1}^n i \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2} \quad (4.6.5)$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \quad (4.6.6)$$

 X が二項分布 $B_i(n, p)$ に従ふとすると、 α を正の実数として、 $f(x) = \alpha^X$ を考へる。

$$E[f(x)] = E[\alpha^X] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \{ {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \} \quad (4.6.7)$$

$$= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (p\alpha)^k (1-p)^{n-k} = (\alpha p + (1-p))^n \quad (4.6.8)$$

これより以下を考へる。

$$\frac{d}{d\alpha} E[\alpha^k] = \sum_{k=0}^n [k(\alpha)^{k-1}] [{}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}] \quad (4.6.9)$$

二手に分かれて計算すると（といふことなのかな？）

$$\left. \frac{dE[\alpha^k]}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} = \begin{cases} \sum_{k=0}^n k_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = E[X] \\ \left. \frac{d}{d\alpha} [\alpha p + (1-p)]^n \right|_{\alpha=1} = np \end{cases} \quad (4.6.10)$$

$$\therefore E[X] = np \quad (4.6.11)$$

同様に、2回微分すれば

$$E[X(X-1)] = \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} E[\alpha^x] \right|_{\alpha=1} = n(n-1)p^2 \quad (4.6.12)$$

これより分散は

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \quad (4.6.13)$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) \quad (4.6.14)$$

實數に値を取る確率変数 X が $p(x)$ に従ひ、

$$E[X] = m \quad V[X] = \mu \quad (4.6.15)$$

のやうに平均と分散が有限に定まるとする。この時、

$$Y = aX + b \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad (4.6.16)$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)p(x) dx = aE[X] + b = am + b \quad (4.6.17)$$

$$V[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [(ax + b) - (am + b)]^2 p(x) dx \quad (4.6.18)$$

$$= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x) dx = a^2 V[X] \quad (4.6.19)$$

これより、特に

$$z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}} \text{ とすると } \begin{cases} E[z] = 0 \\ V[z] = 1 \end{cases} \text{ となる} \quad (4.6.20)$$

定義 21 (中央値 (median))

$$\int_M^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{2} \quad (4.6.21)$$

となるやうな M を中央値と呼ぶ。

補足 4

次のような定義もあるやうだ [1]。おそらくは要素の箇数がちやうど偶数の場合を考慮するものだらう。

$$\int_{-\infty}^M p(x) dx \geq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \int_M^{\infty} p(x) dx \geq \frac{1}{2} \quad (4.6.22)$$

4.6.4 チェビシエフの不等式**定理 8 (チェビシエフの不等式)**

確率変数 X が平均 m と分散 σ^2 を持つとき、任意の $t > 0$ において

$$P(|x - m| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2} \quad (4.6.23)$$

が成り立つ。

証明.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x) dx \geq \int (x - m)^2 p(x) dx \quad (4.6.24)$$

$|x - m| \geq t\sigma$ より

$$\geq \int t^2 \sigma^2 p(x) dx = t^2 \sigma^2 p(|x - m| \geq t\sigma) \quad (4.6.25)$$

□

この不等式の餘事象より、

$$p(|x - m| < t\sigma) \geq 1 - \frac{1}{t^2} \quad (4.6.26)$$

つまり、 X が

$$m - t\sigma < X < m + t\sigma \quad (4.6.27)$$

となる確率は $1 - \frac{1}{t^2}$ 以上である。

4.6.5 マルコフの不等式**定理 9 (マルコフの不等式)**

確率変数 X とその分布 $p(x)$ とある函数 $h(x) \geq 0$ が與へられたとき、

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)p(x) dx \quad (4.6.28)$$

が有限であれば、 $t > 0$ について

$$p(h(x) \geq tg) \leq \frac{1}{t} \quad (4.6.29)$$

4.6.6 二つの確率変数での平均と分散の関係

平均においては加法性が成り立つ。

命題 7 (平均の加法性)

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (4.6.30)$$

さらに一般的に

$$E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad (4.6.31)$$

特に X_i の確率分布がすべて共通なら

$$E[X_1] = E[X_2] = \cdots = \mu \quad (4.6.32)$$

$$\therefore E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = n\mu \quad (4.6.33)$$

こゝでは、 X と Y は独立である必要はない。

分散においては加法性が一般には成り立たない。

命題 8

$$V[X + Y] \neq V[X] + V[Y] \quad (4.6.34)$$

定義より

$$V[X + Y] = \iint [(x + y) - (\mu_x + \mu_y)]^2 f(x, y) dx dy \quad (4.6.35)$$

$$= V[X] + V[Y] + 2 \iint (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy \quad (4.6.36)$$

$$\text{ただし} \begin{cases} \mu_x = E[X] \\ \mu_y = E[Y] \end{cases}$$

4.6.7 共分散

定義 22 (共分散)

二つの確率変数 X, Y に対して、共分散 $\text{Cov}[X, Y]$ を定義する。

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] \quad (4.6.37)$$

$$= \iint (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy \quad (4.6.38)$$

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y] + 2\text{Cov}[X, Y] \quad (4.6.39)$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (4.6.40)$$

命題 9 (共分散の性質)

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X] \quad (4.6.41)$$

$$\text{Cov}[cX, Y] = c\text{Cov}[X, Y] \quad (4.6.42)$$

$$\text{Cov}[X_1 + X_2, Y] = \text{Cov}[X_1, Y] + \text{Cov}[X_2, Y] \quad (4.6.43)$$

$$\text{Cov}[X + c, Y] = \text{Cov}[X, Y] \quad (4.6.44)$$

$$\text{Cov}[X, X] = V[X] \quad (4.6.45)$$

定義 23 (相関係数)

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{V[X]} + \sqrt{V[Y]}} \quad (4.6.46)$$

命題 10 (相関係数の性質)

確率変数 X, Y の相関係数を ρ_{XY} とする。

1.

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad (4.6.47)$$

2. $\rho_{XY} = \pm 1$ の時、適当な a, b を用ゐて

$$Y = aX + b \quad (4.6.48)$$

と表せる。 $\rho_{XY} = 1$ なら $a > 0$ 、 $\rho_{XY} = -1$ なら $a < 0$ である。

3. $\rho_{XY} > 0$ なら X, Y は同じ向きに変化の傾向、 $\rho_{XY} < 0$ なら逆。

4. $\rho_{XY} = 0$ つまり $\text{Cov}[X, Y] = 0$ なら無相関であるといふ。独立なら無相関だが逆は言へない。

4.6.8 独立な確率変数の平均や分散の関係

独立の場合、 $f(x, y) = g(x)h(y)$

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (4.6.49)$$

$$\text{Cov}[X, Y] = 0, \quad \rho_{XY} = 0 \quad (4.6.50)$$

$$V[X \pm Y] = V[X] + V[Y] \quad (4.6.51)$$

もし $X_1, X_2, \dots, X_n$ が同一分布に従ふなら

$$E[X_1] = E[X_2] = \dots = \mu \quad (4.6.52)$$

$$V[X_1] = V[X_2] = \dots = \sigma^2 \quad (4.6.53)$$

$$E\left[\sum X_i\right] = n\mu \quad (4.6.54)$$

$$V\left[\sum X_i\right] = n\sigma^2 \quad (4.6.55)$$

これより、 $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ とすると

$$E[\bar{X}] = \mu \quad (4.6.56)$$

$$E[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.6.57)$$

4.6.9 多変数での平均と分散の関係

$$V[X + Y + Z] = V[X] + V[Y] + V[Z] + 2\text{Cov}[Y, Z] + 2\text{Cov}[Z, X] + 2\text{Cov}[X, Y] \quad (4.6.58)$$

$$V[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n V[X_i] + \sum_{i \neq j} \sum \text{Cov}[X_i, X_j] \quad (4.6.59)$$

定義 24 (共分散行列)

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \text{Cov}[X_i, X_j] & (i \neq j) \\ \text{Cov}[X_i, X_i] = V[X_i] & (i = j) \end{cases} \quad (4.6.60)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.6.61)$$

例 28

$X = \{+1, -1\}$, $Y = \{+1, -1\}$ を考へる。

X \ Y	+1	-1	
	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{7}{10}$
+1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
-1	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

$$E[X] = (+1)\frac{7}{10} + (-1)\frac{3}{10} = \frac{2}{5} \quad (4.6.62)$$

$$E[Y] = -\frac{1}{5} \quad (4.6.63)$$

$$E[XY] = (+1)^2\frac{3}{10} + (+1)(-1)\frac{4}{10} + (-1)(+1)\frac{1}{10} + (-1)^2\frac{2}{10} = 0 \quad (4.6.64)$$

$$V[X] = \left(+1 - \frac{2}{5}\right)^2 \frac{7}{10} + \left(-1 - \frac{2}{5}\right)^2 \frac{3}{10} = \frac{21}{25} \quad (4.6.65)$$

$$V[Y] = \frac{24}{25} \quad (4.6.66)$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0 - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{25} \quad (4.6.67)$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = \frac{1}{\sqrt{126}} = \frac{1}{3\sqrt{14}} \quad (4.6.68)$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \frac{1}{5} \quad (4.6.69)$$

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y] + 2\text{Cov}[X, Y] = \frac{49}{25} \quad (4.6.70)$$

こゝで $X + Y$ を考へて上の値を求めてみる。

$X + Y$	2	0	-2
$p(X + Y)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

これから

$$E[X + Y] = 2 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \quad (4.6.71)$$

$$V[X + Y] = \dots = \frac{49}{25} \quad (4.6.72)$$

$$E[(X + Y)^2] = \frac{50}{25} \quad (4.6.73)$$

$$(E[X + Y])^2 = \frac{1}{25} \quad (4.6.74)$$

$$V[X + Y] = \frac{49}{25} \quad (4.6.75)$$

条件付き期待値つてのもある。

4.6.10 条件付き期待値

命題 11 (条件付き期待値の性質)

$$E[E[X | Y]] = E_Y[E[X | Y]] = E[X] \quad (4.6.76)$$

$$E[X_1 + X_2 | Y] = E[X_1 | Y] + E[X_2 | Y] \quad (4.6.77)$$

$$E[aX + b | Y] = aE[X | Y] + b \quad (4.6.78)$$

$$\begin{cases} E[aX | Y] = aE[X | Y] \\ E[b | Y] = b \end{cases} \quad (4.6.79)$$

もし X が Y の関数 $X = g(Y)$ なら

$$E[g(Y) | Y] = g(Y) \quad (4.6.80)$$

また、条件が 1 対 1 に変換される場合は不変。

例 29

$$E[X | Y, Z] = E[X | Y + Z, Y - Z] \quad (4.6.81)$$

また、 $S_i = \sum_{j=1}^i X_j$ とすると

$$E[Q | X_1, \dots, X_n] = E[Q | S_1, \dots, S_n] \quad (4.6.82)$$

また、 X, Y が同じ確率分布を持ち、かつ $g(X, Y) = g(Y, X)$ (対称) のとき、

$$E[X | g(X, Y)] = E[X | g(Y, X)] \quad (4.6.83)$$

$$E[XY | X] = XE[Y | X] \quad (4.6.84)$$

4.6.11 特性関数

定義 25 (特性関数)実数に値を取る X が確率分布 $p(x)$ に従ふとする。この時実数 t の関数

$$\varphi(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx \quad (4.6.85)$$

を X の特性関数といふ。**命題 12** (特性関数の性質)

特性関数は次の性質を満たす。

1. 任意の t について

$$|\varphi(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (4.6.86)$$

2.

$$\varphi(t) = 1 \quad (4.6.87)$$

3. $p(x)$ が微分 $p'(x)$ を持ち、 $p, \frac{dp}{dx}$ がともに連続で

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |p'(x)| dx \quad (4.6.88)$$

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt \quad (4.6.89)$$

4. X の確率分布 $p(x)$ の特性関数が $\varphi(t)$ であるとき、 $Y = aX + b$ の確率分布は

$$\tilde{p}(y) = \frac{1}{a} p\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (4.6.90)$$

で、特性関数 $\lambda(t)$ は

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \tilde{p}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(ax+b)} p(x) dx = \varphi(at) e^{itb} \quad (4.6.91)$$

5. X_1, X_2 がそれぞれ確率分布 p_1, p_2 にしたがひ、特性関数が $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ となるとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) p_2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2^*(t) dt \quad (4.6.92)$$

これが Parseval の定理である。

6. 独立の場合、 $Y = X_1 + X_2$ の特性関数は

$$\Psi(t) = E \left[e^{it(X_1+X_2)} \right] = E \left[e^{itX_1} \right] + E \left[e^{itX_2} \right] \quad (4.6.93)$$

$$= \varphi_1(t) \varphi_2(t) \quad (4.6.94)$$

より一般に、 $X_1, \dots, X_n$ が独立である時、

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad (4.6.95)$$

の特性関数 Ψ は

$$\Psi(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(t) \quad (4.6.96)$$

4.6.12 モーメントとキュラムメント

定義 26 (モーメント)

X が与えられたとき、0 以上の整数 n について

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (4.6.97)$$

が存在するとき、 X の n 次のモーメントといふ。

命題 13 (モーメントの性質)

確率分布 $p(x)$ に従ふ確率変数 X のモーメントは次を満たす。

1. すべての次数のモーメントを求めれば $p(x)$ が定まる。
2. 特性関数より、

$$\varphi(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx \quad (4.6.98)$$

において両邊を t で n 回微分して $t = 0$ とおくと

$$\varphi^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} \right|_{t=0} = (i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx = (i)^n E[X^n] \quad (4.6.99)$$

3. モーメント母関数とは。

定義 27 (モーメント母関数)

特性関数で $it \equiv S$ として、

$$M(S) \equiv E[e^{SX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Sx} p(x) dx \quad (4.6.100)$$

とするとき、 $M(S)$ をモーメント母関数といふ。

$$M^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n M}{dS^n} \right|_{S=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx = E[X^n] \quad (4.6.101)$$

定義 28 (キュムラント)

$$C(S) = \log(E[e^{SX}]) = \log(M(S)) \quad (4.6.102)$$

をキュムラント母関数といふ。また、

$$k_n \equiv C^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n C}{dS^n} \right|_{S=0} \quad (4.6.103)$$

を n 次のキュムラントといふ。

命題 14 (キュムラントの性質)

μ_n を n 次のモーメントとすると、

$$k_1 = \mu_1 \quad (\text{平均}) \quad (4.6.104)$$

$$k_2 = \mu_2 - (\mu_1)^2 \quad (\text{分散}) \quad (4.6.105)$$

$$k_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2(\mu_1)^3 \quad (4.6.106)$$

$$k_4 = \mu_4 - 3(\mu_2)^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12(\mu_1)^2\mu_2 - 6(\mu_1)^4 \quad (4.6.107)$$

これから、 n 次までのモーメントとキュムラントは同じ情報を持つ。

例 30 (二項分布)

二項分布 $B_i(n, p)$ を考えると

$$p(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad (4.6.108)$$

$$M(S) = E[e^{SX}] = \sum_{r=0}^n e^{Sr} p(r) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} e^{Sr} p^r (1-p)^{n-r} \quad (4.6.109)$$

$$= (e^S p + (1-p))^n \quad (4.6.110)$$

例 31 (標準正規分布)

$m = \mu = 0$, $\sigma^2 = k_1 = 1$ となるやうな正規分布を標準正規分布と呼ぶ。

$$p(x) = N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4.6.111)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{itx} dx \quad (4.6.112)$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} \right] \quad (4.6.113)$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4.6.114)$$

$$M(S) = e^{\frac{S^2}{2}} \quad (4.6.115)$$

$$C(S) = \log M(S) = \frac{S^2}{2} \quad (4.6.116)$$

標準正規分布では 2 次以外のキュムラントは 0 となる。

例 32 (一様分布)

区間 $[-1, 1]$ の一様分布を考える。

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \quad (4.6.117)$$

特性関数は

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \quad (4.6.118)$$

$$= \frac{1}{t} \left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right] = \frac{\sin t}{t} \quad (4.6.119)$$

ただし $t = 0$, $\varphi(0) = 1$ とする

例 33 (離散的な分布)

$$p(x) = \frac{1}{3} \delta(x+1) + \frac{2}{3} \delta(x-2) \quad (4.6.120)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \delta(x+1) e^{itx} + \frac{2}{3} \delta(x-2) e^{itx} \right) dx \quad (4.6.121)$$

$$= \frac{1}{3} e^{-it} + \frac{2}{3} e^{2it} \quad (4.6.122)$$

4.7 確率変数の収束

1. 概収束
2. 確率収束
3. p 次平均収束
4. 法則収束

4.7.1 確率変数の収束モード

定義 29 (概収束)

$X_1, X_2, X_3, \dots$ が X に概収束するとは次のように定義される。

$$p \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right) = 1 \quad (4.7.1)$$

1. 収束するのは X_n
2. ほとんど確実に

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad (4.7.2)$$

ただし、a.s. は almost surely の略。

定義 30 (確率収束)

$X_1, X_2, X_3, \dots$ が X に確率収束するとは、任意の小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(|X - X_n| < \varepsilon) = 1 \quad (4.7.3)$$

1. 収束するのは確率。
- 2.

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \xrightarrow{p} X \quad (4.7.4)$$

定義 31 (p 次平均収束)

$X_1, X_2, X_3, \dots$ が X に p 次平均収束するとは、非負整数である p に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^p] = 0 \quad (4.7.5)$$

1. 収束するのは p 次平均値

定義 32 (法則収束)

法則収束とは次のやうに定義される。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(X_n \leq x) = p(X \leq x) \quad (4.7.6)$$

1. 収束するのは累積分布
2. X_n の確率分布関数を p_n とする時

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx \quad (4.7.7)$$

$f(x)$ は任意の有界連続関数。 $p(x)$ は X の確率分布

- 3.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad (4.7.8)$$

4.7.2 確率変数の収束の性質

定理 10 (大数の (弱) 法則)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が独立で、同一の確率分布に従ふと

$$E[X_i] = m \quad V[X_i] = \sigma^2 \quad (4.7.9)$$

このとき、 $n \rightarrow \infty$ の時

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (4.7.10)$$

を考えると、任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(|\bar{X}_n - m| < \varepsilon) = 1 \quad (4.7.11)$$

$$\text{もしくは} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(|\bar{X}_n - m| > \varepsilon) = 0 \quad (4.7.12)$$

証明. あらすぢだけ。

$$E[\bar{X}_n] = m \quad V[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.7.13)$$

チェビシェフの不等式を $\bar{X}_n$ に適用すると

$$P\left(|\bar{X}_n - m| \geq t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{t^2} \quad (4.7.14)$$

そこで任意の $\varepsilon > 0$ に対して $t = \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon} \sigma$ とすれば、

$$P(|\bar{X}_n - m| > \varepsilon) \leq P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad (4.7.15)$$

$n \rightarrow \infty$ を考えれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - m| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (4.7.16)$$

□

注意 2

コーシー分布 (図 1)

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad (4.7.17)$$

は次のやうな性質を持つ。

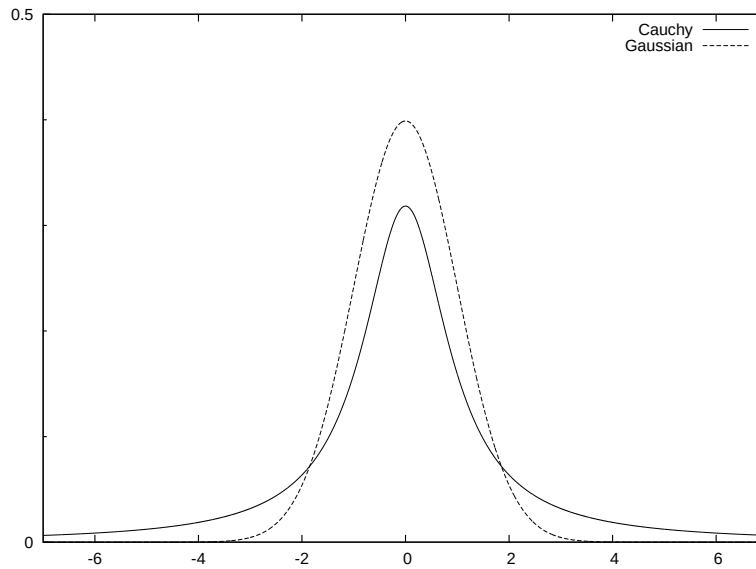


図 1 コーシー分布

1. 有限な平均や分散を持つてゐない。
2. コーシー分布から得られた独立な変数については大数の法則が成り立たない。

應用上サンプル数を大きくしても平均が収束しない時、コーシー分布のやうな分布からのサンプルの可能性がある（たゞ非定常との見分けは困難）。参考として素粒子實驗で見られるブライト・ウィグナー分布が挙げられる。

定義 33 (確率分布の等價)

二つの確率変数が同じ確率分布に従ふとは次のやうに定義される。

1. X, Y の確率密度函数が等しい。
2. X, Y の特性函数が等しい。
3. 任意の有界連續函数 f について、

$$E_x[f(x)] = E_y[f(y)] \quad (4.7.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(y) dy \quad (4.7.19)$$

例 34

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ が法則収束する時、 X_n の特性函数 $\varphi_n(t)$ が X の特性函数 $\varphi(t)$ にそれぞれの t ごとに収束する。

例 35

$n = 1, 2, 3, \dots$ において、 X_n が平均 a_n 、分散 σ_n^2 が正規分布に従ふとする。

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad (4.7.20)$$

$$\sigma_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \quad (4.7.21)$$

なら、 X_n は平均 a 、分散 σ^2 の正規分布に収束する。

例 36

X_n が次の平均と分散を持つ正規分布に従ふ。

$$E[X_n] = \frac{1}{2^n} \quad V[X_n] = \frac{1}{3^n} \quad (4.7.22)$$

この時、 $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ は正規分布を持つ Y に法則収束する。

Y_n の特性函数を $\varphi_n(t)$ とすると、 $\{X_n\}$ の獨立性から、

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^n \left[\exp\left(-\frac{V[X_k]t^2}{2}\right) \exp(itE[X_k]) \right] \quad (4.7.23)$$

参考だが、平均 μ で分散 σ^2 の正規分布は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.7.24)$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + i\mu t} \quad (4.7.25)$$

こゝで

$$\varphi_n(t) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^k} \right) \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right\} \exp \left\{ it \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k} \right) \right\} \quad (4.7.26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{4}} e^{it} \quad (4.7.27)$$

これは平均 1 で分散が $\frac{1}{2}$ の正規分布を持つ Y の特性関数なので、

$$Y_1, Y_2, \dots \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad (4.7.28)$$

法則収束する。

命題 15

$X_1, \dots, X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ が法則収束することと、 X_n の特性関数 $\varphi_n(t)$ が X の特性関数 $\varphi(t)$ にそれぞれの t ごとに収束する。

例 37

$X_n \sim N(m_n, \sigma_n^2)$ とする。 $m_n \rightarrow m, \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 (n \rightarrow \infty)$ なら、 X_n は $N(m, \sigma^2)$ に収束する。

例 38

X_n が正規分布に従ひ、 $E[X_n] = \frac{1}{2^n}, V[X_n] = \frac{1}{3^n}$ のとき、 $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ は正規分布に従ふ Y に法則収束する。

定理 11 (中心極限定理)

實数に値を取る X の平均 $E[X]$ 、分散 $V[X]$ が有限とする。 X と同じ確率分布に従ふ独立な確率変数を $X_1, \dots, X_n$ とするとき、 $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ は大数の法則より、 $E[X]$ に確率収束する。この時分散は $V[Y_n] \rightarrow \frac{V[X]}{n}$ となり、 n に反比例して小さくなる。こゝで、

$$z_n = \sqrt{n} (Y_n - E[X]) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - E[X]) \quad (4.7.29)$$

とおくと、 z_n の分散 $V[z_n]$ は n に依存せず一定。中心極限定理は、この z_n が正規分布に法則収束することを主張してゐる。

確率変数 X は平均が 0、分散が σ^2 であるとする。 $X_1, \dots, X_n$ が独立で X と同じ分布に従ふとき、

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \quad (4.7.30)$$

は平均 0 で、分散 σ^2 の正規分布に従ふ確率変数 Z に法則収束する。

証明. Z_n の特性関数 $\varphi_n(t)$ は

$$\varphi_n(t) = E \left[e^{itZ_n} \right] \quad (4.7.31)$$

$$= E \left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i} \right] \quad (4.7.32)$$

$$= E \left[\prod_{i=1}^n e^{\frac{it}{\sqrt{n}} X_i} \right] \quad (4.7.33)$$

$$= \left(E \left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}} X_i} \right] \right) \quad (4.7.34)$$

こゝで

$$g(s) = \begin{cases} \frac{e^{is} - (1+is)}{(is)^2/2} & s \neq 0 \\ 0 & s = 0 \end{cases} \quad (4.7.35)$$

とすると $g(s)$ は連続で

$$e^{is} = 1 + is - \frac{s^2}{2} g(s) \quad (4.7.36)$$

これを使ふと

$$e^{\frac{it}{\sqrt{n}} X_i} = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} X_i - \frac{t^2 X_i^2}{2n} g\left(\frac{t}{\sqrt{n}} X_i\right) \quad (4.7.37)$$

よつて平均をとると

$$E \left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}} X_i} \right] = 1 - \frac{t^2}{2n} E \left[X_i^2 g\left(\frac{t}{\sqrt{n}} X_i\right) \right] \quad (4.7.38)$$

t を固定すると、各 X_i について $n \rightarrow \infty$ で $g(\frac{t}{\sqrt{n}} X_i) \rightarrow 1$ のため、

$$E \left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}} X_i} \right] \rightarrow 1 - \frac{t^2}{2n} E \left[X_i^2 \right] = 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2n} \quad (4.7.39)$$

$$\varphi_n(t) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2n} \right)^n = e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \quad (4.7.40)$$

これは $N(0, \sigma^2)$ の特性関数。 □

より一般的な表現をすれば $E[X_i] = m$, $V[X_i] = \sigma^2$ のとき、 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ は $N(nm, n\sigma^2)$ に法則収束する。

これは平均 m 、分散 σ^2 の独立な $X_1, \dots, X_n$ を考へ、 $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とすると $Z_n = \frac{\sqrt{n}(Y_n - m)}{\sigma}$ は $N(0, 1)$ に従ふと考へてよい。

補足 5

Z_n の分布は $p(z_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_n^2}{2}}$ で、

$$\int_{-3}^3 p(z_n) dz_n \sim 0.997 > 0.99 \quad (4.7.41)$$

で、 $-3 < Z_n < 3$ つまり $Y_n - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} < m < Y_n + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ は 99% 以上の確率で成立する。

5 ランダムウォーク

5.1 単純ランダムウォーク

5.1.1 定義

定義 34 (単純ランダムウォーク)

$$P(X_i = 1) = p \quad (5.1.1)$$

$$P(X_i = -1) = 1 - p = q \quad (5.1.2)$$

で、各一步が獨立で、それらの和は

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (5.1.3)$$

で表される。これらは次を満たす。

1. それぞれの 1 歩について

$$E[X_i] = p - q \quad (5.1.4)$$

$$V[X_i] = 4pq \quad (5.1.5)$$

2. X_i の獨立性より

$$E[S_n] = n(p - q) \quad (5.1.6)$$

$$V[S_n] = 4npq \quad (5.1.7)$$

3. 確率分布 $p(S_n = x)$ を考へる。 $X_i = \pm 1$ となる歩数をそれぞれ $j_{\pm}$ とおくと、

$$n = j_+ + j_- \quad x = j_+ - j_- \quad (5.1.8)$$

$$j_+ = \frac{n+x}{2} \quad j_- = \frac{n-x}{2} \quad (5.1.9)$$

$$p(S_n = x) = \binom{n}{j_+} p^{j_+} q^{j_-} \quad (5.1.10)$$

$$= \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}} & (-n \leq x \leq n), (n+x) : \text{even.} \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (5.1.11)$$

5.2 対称単純ランダムウォーク

5.2.1 定義

単純ランダムウォークにおいて $p = q = \frac{1}{2}$ としたもの。

命題 16 (対称単純ランダムウォークの性質)

$$E[X_i] = 0 \quad (5.2.1)$$

$$V[X_i] = 1 \quad (5.2.2)$$

$$E[S_n] = 0 \quad (5.2.3)$$

$$V[S_n] = n \quad (5.2.4)$$

$$p(S_n = x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (5.2.5)$$

各々のランダムウォークは一つの折れ線グラフとして表示される。 n ステップまでは 2^n の道があり、それぞれの確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。原点より点 (n, x) への道の本数を $L(n, x)$ とすると

$$L(n, x) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+x}{2}} & n \in [-x, x] \text{ で } n+x \text{ が偶数} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (5.2.6)$$

5.2.2 性質

命題 17

原点の移動に対して L は不変。即ち、点 (n_0, x_0) から (n, x) への道の本数は $L(n - n_0, x - x_0)$ となる。

定理 12 (鏡像原理)

点 A から点 B への道で $x = 0$ となる点のある道の本数は A' から B への道の本数に等しい。

定義 35 (正の道)

正の道とは常に $x > 0$ を満たす道のこと。

命題 18

原点から点 (n, x) ($0 < x \leq n$) への正の道の本数は

$$\binom{x}{\frac{x}{n}} L(n, x) \quad (5.2.7)$$

命題 19 (投票の問題)

候補者 A と B とでの投票を考へる。

A r 票

B s 票

$r > s$ で A が勝利。このとき、A が常に B の票を上回つてゐる割合を考へる。たゞし、投票者は同じ確率で A と B とに投票する。

$$r + s = n \qquad r - s = x \qquad (5.2.8)$$

すべての道 $(0, 0) \rightarrow (n, x)$ の中で、

$$\frac{x}{n} = \frac{r - s}{r + s} \qquad (5.2.9)$$

の割合で A が B より優位。

例 39

10 試合で 6 勝 4 敗の時、勝者が常にリードするのは

$$\frac{6 - 4}{6 + 4} = 0.2 \qquad (5.2.10)$$

例 40 (初到達問題)

原点を出発して時刻 n でレベル $x > 0$ に初めて到達する道の数。

5.3 マルチンゲール

命題 20 (マルチンゲール)

典型的な例。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が獨立で

$$E[X_i] = 0 \quad \forall i \qquad (5.3.1)$$

これらの和を

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \qquad (5.3.2)$$

とするとき、 $m > n$ を満たす m に對して

$$E[S_m \mid S_n, S_{n-1}, \dots, S_1] = S_n \qquad (5.3.3)$$

この確率過程 $S_1, \dots, S_n$ はマルチンゲール (公正な賭け) である。特に $m = n + 1$ として

$$E[S_{n+1} \mid S_n, S_{n-1}, \dots, S_1] = S_n \qquad (5.3.4)$$

これから、時刻 $n + 1$ の条件付き平均が直近 S_n の値と同じ、つまり n までの情報は $n + 1$ の情報に偏つた情報を與へない。

より一般に、 $Q_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ に關してマルチンゲールであるとは

$$E[Q_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_n] = Q_n \qquad (5.3.5)$$

命題 21 (より一般のランダムウォークの性質)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が独立で同一分布に従ひ、 $E[X_i] = \mu$, $V[X_i] = \sigma^2$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ とする。

1.

$$E[S_n] = n\mu \quad V[S_n] = n\sigma^2 \quad (5.3.6)$$

2. $m > n$ の時、 $S_m - S_n$ と S_n は独立

3. $m > n$ の時、 $\text{Cov}[S_m, S_n] = n\sigma^2$

4. $m > n$ の時、相関係数

$$\rho_{S_m, S_n} = \sqrt{\frac{n}{m}} \quad (5.3.7)$$

m と n が近いほど ρ_{S_m, S_n} は 1 に近く、 σ^2, μ に依存しない。

証明.

$$S_m = (S_m - S_n) + S_n \quad (5.3.8)$$

$$E[S_m \mid S_n, S_{n-1}, \dots, S_1] \quad (5.3.9)$$

$$= E[S_m - S_n \mid S_n, \dots, S_1] + E[S_n \mid S_n, \dots, S_1] \quad (5.3.10)$$

$$= E[S_m - S_n] + S_n = S_n \quad (5.3.11)$$

□

例 41

$$Q_n = Q_0 + f_1 X_1 + f_2(X_1) X_2 + f_3(X_1, X_2) X_3 + \dots + f_n(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) X_n \quad (5.3.12)$$

こゝで、各 f_i は「賭け金」それまでの X の情報で決まる。 Q_n は「持ち金」。こゝで、 Q_n はマルチンゲール。

$$E[Q_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_n] \quad (5.3.13)$$

$$= E[Q_n + f_{n+1}(X_1, \dots, X_n) X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] \quad (5.3.14)$$

$$= Q_n + f_{n+1}(X_1, \dots, X_n) E[X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] \quad (5.3.15)$$

$$= Q_n + f_{n+1}(X_1, \dots, X_n) E[X_{n+1}] \quad (5.3.16)$$

$$= Q_n \quad (5.3.17)$$

例 42

S_n を対称単純ランダムウォークとすると、 $Q_n = S_n^2 - n$ はマルチンゲール。

証明.

$$E[Q_{n+1} \mid \underbrace{X_1, \dots, X_n}_{C_n}] \quad (5.3.18)$$

$$= E[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1) \mid C_n] \quad (5.3.19)$$

$$= E[S_n^2 + 2S_n X_{n+1} + (X_{n+1})^2 - (n+1) \mid C_n] \quad (5.3.20)$$

$$= E[S_n^2 \mid C_n] + 2E[S_n X_{n+1} \mid C_n] + E[(X_{n+1})^2 \mid C_n] - (n+1) \quad (5.3.21)$$

$$= S_n^2 + 2S_n E[X_{n+1}] + 1 - (n+1) = S_n^2 - n = Q_n \quad (5.3.22)$$

□

定理 13 (一次元単純対称ランダムウォークに関するマルチンゲール表現定理)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は一次元単純対称ランダムウォークの各一步とする。($X_i = \pm 1, p = q = \frac{1}{2}$)

Q_n が $\{X_1, \dots, X_n\}$ に関してマルチンゲールであるなら、

$$\{f_1, f_2(X_1), f_3(X_1, X_2), \dots, f_n(X_1, \dots, X_{n-1})\} \quad (5.3.23)$$

が存在して、

$$Q_n = Q_0 + \sum_{i=1}^n f_i(X_1, \dots, X_{i-1})X_i \quad (5.3.24)$$

と表現できる。この時 f_i を賭け金やストラテジーと呼ぶ。

例 43

$Q_n = S_n^2 - n$ はマルチンゲールなのでこの定理を用ゐて表現できる。

$$\frac{Q_n - Q_{n-1}}{X_n} = \frac{(S_n^2 - n) - (S_{n-1}^2 - (n-1))}{X_n} \quad (5.3.25)$$

$$= \frac{1}{X_n} (2X_n S_{n-1} + X_n^2 - 1) = 2S_{n-1} \quad (5.3.26)$$

従つて、

$$Q_n - Q_{n-1} = 2S_{n-1}X_n \quad (5.3.27)$$

さらに $Q_0 = 0, Q_1 = (X_1)^2 - 1 = 0$ より

$$f_n(X_1, \dots, X_{n-1}) = 2S_{n-1} \quad (5.3.28)$$

とおけば

$$Q_n = \sum_{i=1}^n 2S_{i-1}X_i \quad (5.3.29)$$

$$= 2S_0X_1 + 2S_1X_2 + \dots + 2S_{n-1}X_n \quad (5.3.30)$$

と表現できる。

定理 14 (離散伊藤公式)

一次元単純対称ランダムウォークについて以下が成り立つ。

$$g(S_{n+1}) - g(S_n) = \frac{g(S_n + 1) - g(S_n - 1)}{2}(S_{n+1} - S_n) + \frac{1}{2}[g(S_n + 1) - 2g(S_n) + g(S_n - 1)] \quad (5.3.31)$$

証明.

$$g(S_{n+1}) - g(S_n) - \frac{1}{2}[g(S_n + 1) - 2g(S_n) + g(S_n - 1)] \quad (5.3.32)$$

$$= g(S_n + X_{n+1}) - \frac{1}{2}[g(S_n + 1) + g(S_n - 1)] \quad (5.3.33)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[g(S_n + 1) - g(S_n - 1)] & (X_{n+1} = +1) \\ \frac{1}{2}[g(S_n - 1) - g(S_n + 1)] & (X_{n+1} = -1) \end{cases} \quad (5.3.34)$$

$$= \frac{1}{2}[g(S_n + 1) - g(S_n - 1)](S_{n+1} - S_n) \quad (5.3.35)$$

□

定理 15 (Doob-Meyer 分解)

離散確率過程

$$R_n = h(X_1 \dots X_n)_{S_1 \dots S_n} \quad (5.3.36)$$

がある時、 $R_n = M_n + A_n$ と分解できる。ここで、 M_n はマルチンゲール。 A_n は $A_n = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ と一つ前までの確率変数から決定される予測可能な確率過程。一般に離散伊藤公式より

$$h(S_n) - h(S_0) \quad (5.3.37)$$

$$= \{h(S_n) - h(S_{n-1})\} + \{h(S_{n-1}) - h(S_{n-2})\} + \dots + \{h(S_1) - h(S_0)\} \quad (5.3.38)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \{h(S_i + 1) - h(S_i - 1)\}(S_{i+1} - S_i) \quad (= M_n) \quad (5.3.39)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \{h(S_i + 1) - 2h(S_i) + h(S_i - 1)\} \quad (= A_n - h(S_0)) \quad (5.3.40)$$

例 44 ($(S_n)^3$ の Doob-Mayer 分解)

$h(x) = x^3$ とすると、

$$(S_n)^3 - (0)^3 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(S_i + 1)^3 - (S_i - 1)^3}{2}(S_{i+1} - S_i) \quad (5.3.41)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \{(S_i + 1)^3 - 2(S_i)^3 + (S_i - 1)^3\} \quad (5.3.42)$$

$$\therefore (S_n)^3 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (3(S_i)^2 + 1)X_{i+1}}_{M_n} + 3 \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} S_i}_{A_n} \quad (5.3.43)$$

5.4 ブラウン運動

定義 36 (ブラウン運動)

連続時間ランダムウォーク。一步の長さ $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$ で一步の時間 Δt 。このランダムウォークを $S_t^{\Delta t}$ と表現する。

$$S_t^{\Delta t} = \Delta x(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}) \quad (n = \frac{t}{\Delta t}) \quad (5.4.1)$$

$$= \sqrt{\Delta t}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}) \quad (5.4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } p(X_i = 1) &= p(X_i = -1) = \frac{1}{2} \\ X_1, \dots, X_n &\text{は独立} \end{aligned}$$

こゝで $S_t^{\Delta t}$ の特性函数を考へる。

$$\varphi(v) = E \left[e^{ivS_t^{\Delta t}} \right] \quad (5.4.3)$$

$$= E \left[e^{iv(\sqrt{\Delta t}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}))} \right] \quad (5.4.4)$$

$$= \left\{ E \left[e^{iv\sqrt{\Delta t}X} \right] \right\}^{\frac{t}{\Delta t}} \quad (5.4.5)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}e^{iv\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2}e^{-iv\sqrt{\Delta t}} \right\}^{\frac{t}{\Delta t}} \quad (5.4.6)$$

$$= \left\{ \cos(v\sqrt{\Delta t}) \right\}^{\frac{t}{\Delta t}} \quad (5.4.7)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ とすると、 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left\{ \cos(v\sqrt{\Delta t}) \right\}^{\frac{t}{\Delta t}} \right] \sim \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{1}{2}v^2\Delta t + O(\Delta t^2) \right\}^{\frac{t}{\Delta t}} \quad (5.4.8)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}v^2t} \quad (5.4.9)$$

これは $N(0, t)$ の正規分布の特性函数と一致。

参考文献

- [1] 「中央値 - Wikipedia」 <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%AD%E5%A4%AE%E5%80%A4>