

損害保険数理

UT Actuary-seminar

October 17, 2011

一応教科書と過去問とにらめっこして過去問で多く扱われていた大事なところをまとめました。あくまで教科書の補助として利用してください。

1 損害保険料率の基礎知識

アクチュアリーの仕事として思い浮かべる内容の一つとして保険料の算定が挙げられるが、どのように決めているかの基本について学ぼう。

1.1 損害保険料の仕組み

まあ一般に保険料と言うのはそりゃ保険会社の利潤とかも含まれてるわけで、本来の保険業に使われるだけではない。というわけで全部ひくくめた保険料を営業保険料と呼び、純粋に保険のために使われる部分を純保険料、それ以外の部分を付加保険料と呼ぶ。

損害保険料の計算で必要な式はただ一つ "貰ったお金でやりくりするの式" (収支相当式) である。この際気をつけておきたい区別として特別断わらない限り純保険料、社費は収入の大きさによらないが、手数料、利潤は収入に比例させるということである。だから

$$P \text{ 貰うお金} = r \text{ 純保険料} + e \text{ 社費} + (\theta \text{ 手数料率} + \delta \text{ 利潤率}) P \text{ 貰うお金}$$

これを P について解けばいいだけ。ところで営業保険料のうち純保険料に使われる割合を損害率と呼ぶ。

ex1.1 営業保険料の算出

ある保険会社は予定純保険料が 10000 で予定社費が 2500 手数料率が 15% 利潤率が 5% の予定である。このとき営業保険料はいくつに設定すべきか？

まあこんな風に計算するわけだけど、その前の大前提として「どうやって予定純保険料を出すの？」という疑問がある。これにはいくつか方法があるが損害率法と純保険料法というのを覚えよう。

損害率法は前の損害率の実績データを利用するもの。純保険料法は予定保険料を理論的に出すもの。ただしどちらも元々の保険料があって、それを実績データに基づき改善するといったものであるようだ。このとき実績データをどれくらい信頼するかを決める必要があるが、これを信頼度と呼ぶ。

信頼度の使い方としては、 Z を信頼度として線分の内分点のノリで

$$P \text{ 求める値} = Z \text{ 実績データ} + (1 - Z) \text{ 理論データ}$$

ex1.2 損害率法

ある保険会社の予想損害率は 60% だったが昨年度の実績損害率は 55% だった。信頼度を 0.8 とすると今年度の損害率をいくつに設定すべきか？

ex1.3 純保険料法

ある保険会社の予定純保険料は 10000 だったが昨年度は契約件数 100 件で保険金請求額は 920000 であった。信頼度を 0.6 とすると今年度の純保険料はいくらに設定すべきか？

1.2 長期契約保険料

一般に損害保険は一年契約の掛け捨てが多いが、長期の契約もある。これも上とほぼ同じ考え方だが、「社費の中にも最初だけ必要なお金 (新契約費) と契約期間中ずっと必要なお金 (契約維持費) があるということ」と「将来的に必要なお金を今貰えると嬉しいから少なめにしておける」ってことに注意。

$$P' = A + (r + B)(1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}) + (\theta + \delta)P'$$

このように求めた長期契約保険料に対し $\frac{P'}{P}$ の値を長期化係数 K とする。

演習 過去問 H20(1), H18(1) 補足問題 例題 81

1.3 損害率の計算 (補足)

リトナーシスやアーンドプレミアムなどなど書かれているが区別をつけておこう。そもそもなぜ区別をつけなくちゃいけないかを理解するために例をみよう。

ある機械製作会社では機械の生産販売とアフターサービスの 2 部門に分かれており、当然だがアフターサービスは販売後しばらく経ってから費用がかかる。この会社は業績が向上途中であり、顧客は毎年増加しているとする。このとき、ある年度の収支だけとってきて採算がとれているか判断するのは正しいだろうか？

回答としては No である。なぜならその年度で必要になるアフターサービスの費用はその年度より顧客が少ないときの分であり、現在の顧客の数と対応しておらず、顧客 1 人あたりに必要なアフターサービスの量を少なめに見積もってしまうからだ。

この例でみたように、ある商品と対応した収支と、ただのある年度の収支は区別する必要があり、前者を (earned premium、incurred loss)、後者を (written premium、paid loss) と呼ぶ。

2 クレーム分析

純保険料を算出するのに、請求されるであろう保険金 (クレーム額) を推定する必要があるが、この推定には「クレームがどれくらい起こるか?」「クレーム発生の際はどれくらい発生するか?」と分けて考えることが多い。以降クレーム額は X 、クレーム件数は N 、クレーム総額は S と表す。

2.1 クレーム額分布

クレーム額の分布によく用いられるのが正規分布、対数正規分布などであり、少しその性質に触れておこう。

$LN(\mu, \sigma^2)$ は X に対し $\log$ をとったものが正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うというもので、変数変換の公式に従えば確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$E[X^2] = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$$

ex2.1 対数正規分布

$LN(\mu, \sigma^2)$ の平均を計算して上の結果と確認せよ。

クレーム額分布の推定に用いられるのはモーメント法や最尤法などがあるが、免責などである値以下のデータが得られないときは最尤法が用いられることが多いようである。と、ここで免責について触れておくともちろん「ある額以下は支払わない」というきまりだが、エクセス方式とフランチャイズ方式の二つを覚えておこう。

エクセス方式では免責額を超えると 0 からスタートだが、フランチャイズ方式だと免責金額を超えると一気に跳ね上がる。ってイメージで構わないだろう。

演習 過去問 H17(3), H21IV 補足問題 例題 8,9,10,14,15,83,85,86

2.2 クレーム頻度分布

クレーム頻度の分布によく用いられるのが負の二項分布、ポアソン分布である

$NB(n, p)$ は成功確率 p の試行を n 回成功するまで行うときの試行回数が成す分布で

$$P(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k$$

$$E[X] = \frac{np}{1-p}$$

$$V(X) = \frac{np}{(1-p)^2}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)\exp t} \right)^n$$

と与えられる。

なぜ負の二項分布がよくつかわれるかは「異なるリスクを持った集団におけるクレーム件数は負の二項分布に従うようである」という特徴があるから。

ex2.2 負の二項分布

演習 過去問 H19(3)

2.3 クレーム総額分布

クレーム総額は $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ のように 各 X_i 個数 N とともに確率変数であるため、きれいな関数で与えることができない。

このような分布を複合分布と呼び、 N がどの分布に従うかで複合ポアソン分布や複合負の二項分布と呼ぶ。

2.3.1 とりあえず $E[S]$ $V(S)$ は欲しいな

これらの導出は条件付き確率の分野を復習してほしい。ただ先に N を固定して中身を計算するだけ。

$$E[S] = E_N[E_X[X_1 + \cdots + X_N \mid N]] = E_N[NE_X[X]] = E[X]E[N]$$

$$V(S) = E_N[V_X(X_1 + \cdots + X_N \mid N)] + V_N(E_X[X_1 + \cdots + X_N \mid N])$$

$$= E_N[NV_X(X)] + V_N(NE_X[X]) = E[N]V(X) + V(N)E[X]^2$$

ということで X と N の平均分散のみで S の平均分散は出せると分かった。

ex2.3 クレーム総額平均

$N \sim Po(\lambda)$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ の平均・分散を求めよ。

演習 過去問 H16(1), H16(4)

2.3.2 もっと広げて積率母関数 $M_S(t)$ とか出せないかな？

$$M_S(t) = E_S[e^{St}] = E_N[E_X[e^{X_1 t + \cdots + X_N t} \mid N]] = E_N[M_X(t)^N]$$

$$= E_N[\exp\{N \log M_X(t)\}] = M_N(\log M_X(t))$$

このように特性関数は出しやすいのでここから逆変換すればいいじゃん♪ っていうのが逆変換法。もちろん上で出したのは積率母関数であり特性関数は $\phi(t) = M_S(it)$ で出せるもの。積率母関数より収束しやすく存在しやすいという利点がある。

ex2.4 クレーム総額の積率母関数

$N \sim Po(\lambda)$ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d. のとき $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ の積率母関数を求めよ。

2.3.3 まあどちらにしろしっかり出せないのは変わらないので畳みこみを数値計算して求める

畳みこみの計算を順に行っていくわけであるが実に面倒である。ただし複合ポアソン分布のときは以下の公式が成立するので覚えておくと便利か。証明は例題 23 を参照。

$$P(S = s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{s} \lambda p(X = i) P(S = s - i)$$

演習 過去問 H14(9), H17(4), H16(3)

2.3.4 本物とまではいかなくても他の分布で近似してやるのはどう？

S の分布を正規分布や移動 Γ 分布で近似してやることを考える。先ほど求めた積率母関数を用いて、複合分布のモーメントと近似させる分布のモーメントを一致させることでパラメーターの決定を行う。

ところで移動 Γ 分布について触れておくと、通常の $Ga(\alpha, \beta)$ では

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$$

となっているが、移動 Γ 分布では全体が x 軸方向に平行移動しており、モーメントは平均のみその平行移動分だけ変化する。

ex2.5 Γ 分布

Γ 分布 $Ga(\alpha, \beta)$ の積率母関数を求めよ。

演習 過去問 H20(3), H21III

3 再保険

とりあえず純保険料の求め方は分かったけどそれに関連して再保険というのがあったりする。保険会社のリスクを再び集めることでリスクを更に分散させる狙いがあるってわけだ。ここでは再保険を行ったときの保険料の計算などを主に扱う。

3.1 比例再保険

引き受けた保険の一定割合を出再する。

ex3.1 ある保険でクレーム額 X の分布が以下で与えられているとき、20%の比例再保険のネット再保険料を求めよ。

x	1	2	3
$P(X = x)$	0.3	0.5	0.2

3.2 超過額再保険

引き受けた保険の保有額が一定値を越えた分だけ出再する。契約金というあまり他で見ないものが重要になるので注意！

ex3.2 ある保険でクレーム額 X の分布、契約金額 Y の分布が以下で与えられているとき (表から分かるようにクレーム額分布は契約金額によって変化することに注意!)、エクセスポイント 2 の超過額再保険のネット再保険料を求めよ。

y	1	2	3
$P(Y = y)$	0.3	0.5	0.2

x	y	$2y$
$P(X = x)$	0.3	0.7

3.3 ELC 再保険 (超過損害額再保険)

対象契約の損害額が一定値を超えた分だけ出再する。

ex3.3 ある保険でクレーム額 $X \sim Ex(\mu)$ のとき、エクセスポイント u 、支払限度額 v の ELC 再保険のネット再保険料を求めよ。

3.4 ストップロス再保険

契約集団全体の損害額が一定値を越えた分だけ出再する。

ex3.1 ある保険でクレーム額 X の分布、クレーム件数 N の分布が以下で与えられているとき、エクセスポイント 5 のストップロス再保険のネット再保険料を求めよ。

x	1	2
$P(X = x)$	0.3	0.7

n	0	1	2	3
$P(N = n)$	0.4	0.3	0.2	0.1

3.5 ちゃんぽん

上記のいくつかの再保険を組み合わせて使う。比例再保険を適用後に損害額再保険を使うとか。

4 信頼性理論

さあデータをとりあえず集めてみたけど、これをそのまま使っちゃっていいのだろうか？ということで、集めたデータがどれくらい信頼できるのかを考えるとしよう。

4.1 有限変動信頼性理論

これは予想値と実際の値の誤差が、ある一定の範囲に十分大きな確率で収まるために必要なデータ量はどれくらいなのかを考えるもの。また十分信頼する（全信頼）に必要なデータが集まらなかったときにどれくらい信頼できるかを考える。と大雑把に書いたが、契約件数を用いて信頼度を出す場合とクレーム件数を用いて信頼度を出す場合で違いがあることに注意しよう。

以下では標本は十分大きく、中心極限定理から正規分布に近似できるという仮定のもとで推論している。

4.1.1 全信頼に必要な契約件数

この場合は非常に簡単で、例えば n 人の契約者の年間クレーム分布がそれぞれ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d. の時、実際のクレーム額平均 $\bar{X}$ が予想値の $\pm 10\%$ に入っている確率が 95% を超えるような n を求めよ。

一応答えを書いておくと $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ より、平均 $\bar{X}$ が予想値の $\pm 10\%$ に入っている確率は

$$P(0.9\mu \leq \bar{X} \leq 1.1\mu) = P\left(-\frac{0.1\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{0.1\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$$

ここで $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$ より標準正規分布表と、目標の確率 95% から $\frac{0.1\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = 0.0627$ となり、これを n について解くだけ。

4.1.2 全信頼に必要なクレーム件数

クレーム総額が予想値の $\pm 100\alpha\%$ に入る確率が $100p\%$ となる全信頼に必要なクレーム件数 n_F は

$$n_F = \left(\frac{y_{\frac{q}{2}}}{\alpha}\right)^2 \{CV(X)^2 + n_2\} : CV(X) = \frac{\sqrt{V(X)}}{E[X]}, n_2 = \frac{V(N)}{E[N]}$$

で求めることができる。ただし $y_{\frac{q}{2}}$ は $1 - \Phi(y) = \frac{q}{2}$ となる点である。証明は例題 29 を参照。

ということで全信頼に必要な値が求まったわけであるが、実際のデータがこの値に届かなかった場合はこの値を用いて信頼度を出す。その場合の信頼度 $Z = \sqrt{\frac{n}{n_F}}$ とする。証明は例題 30 を参照。

ところで上ではクレーム総額に限定していたが、例題 31, 32 のように片方を一定にすることでクレーム件数のみやクレーム額のみ信頼度が出せる。

4.2 Bayes 方法論

リスク集団においてもパラメータはバラついており、全員に同じパラメータを適用するのは良くないだろう。しかし、パラメータが直接観測できない場合どのように料率を適用すればよいだろうか？

このような問題はまさしくベイズ理論の得意とするところで、全体のパラメータの分布 $\pi(\theta)$ とそのパラメータに対応する X の分布 $f_{X|\Theta}(x|\theta)$ が与えられ、実際の標本が x だったときの θ の事後分布はベイズの定理から

$$\pi(\theta|x) \propto f_{X|\Theta}(x|\theta)\pi(\theta)$$

とできて、 θ の推定が行える。

…とは言っても、この分布がキレイな形になるとは限らない。ということで期待値の推定値に絞って考えよう。

4.3 Bühlmann 理論

平均値の推定のうち線型推定量のクラスに限って推定を行うことを考える。

問題を定式化すると、クレーム額 X_i はあるパラメータ θ によって変わる確率分布 $X_i \sim X(\theta)$ となっているが肝心の θ は観測できない、しかし θ が確率分布 $U(\Theta)$ に従っていること、パラメータが θ の時の $X(\theta)$ の平均・分散 $\mu(\theta), \sigma^2(\theta)$ は既知とする。ここで、分布 $X(\theta)$ から i.i.d. で n 個の標本をとってきたとき、 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を用いた線型推定量のうち最良のものを求めよ。ということ。

損失関数として二乗誤差を選び、ベイズリスクを最小化するとして式を立てることが分れば教科書の証明がすんなり読めるだろう。

このとき n を観測年数とし以下のように推定量が整理できる。

$$\hat{\mu}(\theta) = (1 - Z)\mu + Z\bar{X} : Z = \frac{n}{n + \frac{v}{w}}$$

$$v = E_{\theta}[\sigma^2(\theta)] \quad w = V_{\theta}(\mu(\theta))$$

μ は全体での平均 $E_{\theta}[\mu(\theta)]$ 、この式における Z は信頼度とみることができる。

ところで、一般的に $E_{\theta}[\cdot]$ や $V_{\theta}[\cdot]$ は θ の分布が未知だと求められないので普通はこの分布が与えられることになるが、 $X \sim Po(\theta)$ で全体の $E[X], V(X)$ だけ与えられる場合などは θ の分布が与えられなくても、少し工夫することで v, w を求めることができる。

$$v = E_{\theta}[V_X(X|\theta)] = E_{\theta}[E_X[X|\theta]] = E[X]$$

$$w = V_{\theta}(E_X[X|\theta]) = V(X) - E_{\theta}[V_X(X|\theta)] = V(X) - v$$

他にも幾何分布の例が例題 37 にある。

5 クラス料率

ある危険集団に対して適用する料率は合理的かつ平等である必要がある。では具体的にはどのような決め方をしているのだろうか？

5.1 リスクの分類とタリフ構造

次のような質問 Q1. あなたはお酒を飲みますか？ Q2. タバコは吸いますか？ を考える。この場合 Yes or No で 4 つのグループに分けられ、これらは別々に料率を適用すべきであろう。この分類に基づく料率決定の構造をタリフ構造という。

しかし、一般的にリスクは多様（複合分類リスク）で相互作用が存在したり、また、各分類に対してどのように料率を決定していくべきかは明らかでない場合が多く、どのタリフ構造が最良であるとは一概に言えない。

以下では二つのリスク分類要素を持つタリフ構造での料率算出法を考える。

	B			
	危険等級	b1	b2	計
	a1	r_{11}	r_{12}	$r_{1\cdot}$
	a2	r_{21}	r_{22}	$r_{2\cdot}$
	計	$r_{\cdot 1}$	$r_{\cdot 2}$	$r_{\cdot \cdot}$

n_{ij} は契約件数、 r_{ij} を相対クレームコストと呼び全体のクレーム平均に対するクレームの大きさを示す。

5.2 Bailey-Simon 法

料率区分が満たすべきいくつかの性質を挙げ、それにあつたものを考える。その性質が以下のいくつかである。

1. 単一の区分、全体において収支のバランスがとれていること
2. データの信頼性を反映したものであること
3. 実際のデータとの誤差の総計が最小になること
4. 料率が実際の値に十分近いこと

5.3 Minimum Bias 法

Bailey-Simon 法では制約が多すぎて解くことが難しかったので、上の基準のうち 1 に重点を置き、各区分での収支が一致するという式のみで出す。

$$\sum n_{ij}(r_{ij} - \hat{r}_{ij}) = 0$$

5.4 Jung 法

複合分類リスクが互いに独立に $Po(n_{ij}\hat{r}_{ij})$ に従っているとして、実績データから最尤推定を行う。

以上 3 つの方法を挙げたが Minimum Bias 法は Bailey-Simon 法と大体一致し、Jung 法と Minimum Bias 法はタリフ構造を乗法型としたときは結果が一致するということが知られている。実際に試験では手計算のみで解けるものしか問われないため、Minimum Bias 法以外問われたことはない。

6 IBNR 推定

ある年度のクレーム額がでてもそれだけではなく、まだ請求されてないがこれから追加で請求されうる金額についても考えなきゃいけない。このように既発生未報告 (IBNR; incurred but not reported) に対する準備を IBNR 備金という。

この見積法としては教科書では個別見積法、算式見積法、統計的見積法などが紹介されているが、統計的見積法のみ説明する。

6.1 loss development factor

統計的見積法においては次のような三角形の格好のデータを利用する。

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	
3	C_{31}	C_{32}		
4	C_{41}			

これは各事故年度の累計クレーム額がどういふ変化をするかを表した統計で、loss development という。

6.2 chain ladder 法

各経過年度において前年度との比率 (loss development factor; $b_j = \frac{C_j}{C_{j-1}}$) を求める。これはつまりどのように累計クレームが変化するかを比の関係で捉えたものである。この b_j を利用して最終的な累計支払い金を予測し、現在の支払い額との差を IBNR 備金とする。

しかしこの b_j は統計から推測する必要がある、各事故年度 i で出した $\hat{b}_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_{ij-1}}$ の単純平均だけでなく様々な方法があることを知っておこう。

インフレ反映

chain ladder 法の特例としてインフレ率を考慮にいれて考える場合がある。保険金は支払時の通貨価値に基づいて行われるため、ある年度を基準に価値をそろえてから loss development factor を推定する必要がある。最終的に再びインフレを考慮してから IBNR の推定を行う。

6.3 Bornhuetter-Ferguson 法

chain ladder 法で loss development factor を求めて、現時点での支払い額と最終的な支払い額の比を算出する。ここで最終的な支払い額を何らかの方法で定め (既経過保険料と予定損害率を利用するなど)、残り支払うであろう額を算出する。

7 危険理論

保険会社はリスクを請け負うのであり自身も倒産などのリスクを負うことになる。これを避けるためにはどれくらい保険料収入と最初の資金を設定すれば良いのだろうか？これを知るためにいくつかの仮定の下での倒産確率を考えてみよう。

7.1 Poisson 過程

7.1.1 危険過程

クレーム件数過程は時刻 t 時点での総件数を確率変数 $\{N_t\}$ としたもの (もっと正確な定義は教科書参照)。総クレーム額を確率変数 $\{S_t\}$ としたものをクレーム総額過程と呼ぶ。ところで保険会社としては、自社資産がどう推移するのが知りたいわけで、 c を単位時間の保険料とし $U_t = u_0 + ct - S_t$ の動きを考えたい。これをサープラス過程と呼ぶ。

7.1.2 Poisson 過程とオペレーショナルタイム

計数過程が以下の 3 条件を満たすとき Poisson 過程と呼び、 $N_t \sim Po(\lambda t)$ に従う。つまり確率関数は

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

1. 時間的に独立 ($[s, t)$ と $[\nu, u)$ それぞれで起こる回数は独立)
2. 時間的に同分布 ($N_{s+t} - N_t$ と N_s は同分布に従う)
3. 同時に 2 回は起こらない

ところで上の過程は非常に厳しいため、少し逸脱した場合を考えてみよう。

2'. $f_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(N_t = 0)$ が t について単調減少連続関数

としたとき $\tau(t) = -\log f_0(t)$ と定めると $N_t \sim Po(\tau(t))$ となる。ここでやっていることは変数変換により、むりやり Poisson 過程の形に直しているだけである。この $\tau(t)$ をオペレーショナルタイムと呼ぶ。

7.2 Lundberg モデル

Poisson 過程を前提としたサープラス過程で収入部分を $(1 + \theta)\lambda\mu$ と置き換えただけ。これが何かというと $\lambda = E[N], \mu = E[X]$ より $\lambda\mu = E[S]$ に安全割増 θ をつけたものである。

7.2.1 Lundberg の不等式

離散確率過程では以下の公式が成立する。等式についての証明は教科書参照。マルチンゲールの停止時間、任意停止定理、マルチンゲールへの変数変換の 3 つに注目すれば追えると思います。不等式については H.18 問 3 を参照。

初期サープラス u_0 として破産確率を $\epsilon(u_0)$ とすると、破産時刻を T 、単位時間あたりの総支払い額を表す確率変数を W とすると

$$\epsilon(u_0) = \frac{e^{-Ru_0}}{E[e^{-RU_T} | T < \infty]} \leq e^{-Ru_0} \quad \text{調整係数 } R \text{ は } M_W(r) = e^{r(1+\theta)\mu\lambda} \text{ の解}$$

ここで複合 Poisson 過程を仮定すると調整係数 R について

$$M_W(t) = M_N(\log M_X(t)) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\} \text{ より } M_X(r) = 1 + r(1 + \theta)\mu$$

という方程式の解として定められる。

7.2.2 破産確率の微分積分方程式

以上で紹介した調整係数を用いた方法以外を考えてみよう。

初期サープラス u のサープラス過程において破産して、なおかつ直後の欠損額が y となる確率を $G(u, y)$ とおいたとき、この関数が満たす方程式を考える。ここで大事なのは右の図で、条件を満たすような破産の方法を 3 通りにと場合分けしてみる。なお、単位時間あたりに事故発生の確率を λ とし、微少区間 Δt なので事故は起こっても一件と考えられる。

$$G(u, y) = (1 - \lambda \Delta t)G(u + c\Delta t, y) + \lambda \Delta t \int_0^{u+c\Delta t} G(u + c\Delta t - x, y)f(x)dx + \lambda \Delta t \int_{u+c\Delta t+y}^{\infty} f(x)dx$$

この式を少し整理して $\Delta t \rightarrow 0$ とすると以下の微分積分方程式が導かれる。

$$\frac{c}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u} G(u, y) = G(u, y) - \int_0^u G(u - x, y)f(x)dx - \int_{u+y}^{\infty} f(x)dx$$

この式を少しいじると次のような利用ができる。

1. 破産確率 $\epsilon(u)$ は上の $G(u, y)$ に $y = 0$ を入れたものであるため、ここから破産確率についての微分方程式が導ける。
2. 両辺を u について $(0, \infty)$ で積分すると初期サープラス 0 での関係式が導ける。

おまけ

Poisson 過程の証明

$f_0(s+t) = f_0(s)f_0(t)$ は教科書と同様で $\lim_{t \rightarrow 0} f(t+\epsilon) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)f(\epsilon) \Leftrightarrow f(0) = 1$ が導けて、単調減少性から $f'(0) = -\lambda$ と置くと

$$f'(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon} = f(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon) - f(0)}{\epsilon} = -\lambda f(t)$$

この微分方程式を解くと $f(t) = e^{-\lambda t}$ となり、発生間隔が指数分布に従うことが分かり、以下のように Poisson 過程の式が導ける。

$$T_n = (T_n - T_{n-1}) + (T_{n-1} - T_{n-2}) + \dots + (T_2 - T_1) + T_1 = D_1 + D_2 + \dots + D_n \sim Ga(n, \lambda)$$

ここで Γ 分布に積分計算において部分積分を利用してやるだけ

$$P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} t^n e^{-\lambda t} dt = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

8 リスク評価の数理

8.1 極値理論

8.1.1 ブロック最大値モデル

とにかく標本中の最大値の振る舞いのみを考えようというもの。 $X_j \sim F$ ($j = 1, 2, \dots, n$) に i.i.d. に従うとしてその内の最大値を M_n とする。このまま $n \rightarrow \infty$ とすると当然 F の分布中とりうる最大値に近づいていくが、ある数列 c_n, d_n を用いて $Z_n = (M_n - c_n)/d_n$ と変数変換すると、ある分布に収束する場合がある。これはグンベル分布、フレシェ分布、ワイブル分布のいずれかに従うことが知られている。これらの分布を極値分布と呼ぶ。これにより近似的な分布を求められ、最大値の分布を考えやすくなるわけだ。

8.1.2 閾値超過モデル

閾値 u を設定して、その値を超えた場合の超過分の条件付分布を考える。再保険の問題を既にやった人は「ああ、エクセスポイントを設定した上での超過額の分布ね」って感じでいいかと。平均超過関数は上の超過分の平均。

8.2 リスクの統合

ポートフォリオのようにいくつかのリスクによって決定するものの全体のリスクを考える。

簡単な例としては多次元正規分布 $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ のとき $Y = a^T X$ のような線型結合の和の分布は $Y \sim N(a^T \mu, a^T \Sigma a)$ となる。これはいくつかの正規分布に従うもののポートフォリオと考えられ、全体のリスクを考えるときには関連の度合いを考慮に入れる必要がある（ここでは共分散）。これを調べるためにいくつか従属性の尺度というのを導入する。教科書で紹介されているケンドールの τ やスピアマンの ρ というのがそれである。

8.3 リスク尺度

確率変数のリスクの大きさを定量的にみるためリスク尺度というものを導入する。おなじみの分散（投資とかだったらボラティリティとか呼んだりも）とかもリスクの尺度のひとつであるがここでは VaR とそれに関連する尺度を考える。

VaR とは Value at Risk の略であり、そのまんまリスクに対応する値ということである。信頼水準 $100 - \alpha\%$ の VaR とはそれを下回る確率が丁度 $100 - \alpha\%$ になるような値を指す。VaR に関連したリスク尺度として ES、TVaR、CTE というものがあるが大きく意味に違いが出てくるのは離散分布のときであり、ここでは TVaR についてのみ扱う。

$$TVaR = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

であり、これは VaR を超過した場合の条件付期待値である。教科書にあるのはこれを変形したものである。

9 積立保険 (途中)

積立保険とはその名の通り保険料を積み立てていく仕組みを持った保険契約のこと。ただ分けて払うだけではなく、途中で契約を抜ける可能性も込みで料金を算出する必要がある。

9.1 営業保険料

積立保険の営業保険料は純保険料、付加保険料、積立保険料からなる。純保険料については今まで通り。付加保険料については長期契約の場合と同様に新規契約費と維持費と代理店手数料について考えればよい。満期返戻金とは契約満期時に払い戻されるものを指し、積立保険料は満期返戻金のために積み立てられる部分である。

10 保険料算出原理

純保険料の求め方などはクレーム分析などで学習したが、それだけでなく安全割増を行う必要があることは既にも書いた通りである。では具体的にどのように安全割増も含めた保険料を算出するのが良いのだろうか？

10.1 保険料算出原理

確率変数 X の分布に対してその保険料を与える関数を $\pi(X)$ と置く。基本的には期待値にリスクプレミアムを足したもののってイメージで ok

1. 期待値原理 $\pi(X) = (1 + h)\mu_X$
2. 分散原理 $\pi(X) = \mu_X + h\sigma_x^2$
3. 標準偏差原理 $\pi(X) = \mu_X + h\sigma_X$
4. 指数原理 $\pi(X) = \frac{\log M_X(h)}{h}$
5. パーセンタイル原理 $\pi(X) = \min\{p | F_X(p) \geq 1 - \epsilon\}$
6. エッシャー原理 $\pi(X) = \frac{M'_X(h)}{M_X(h)}$
7. ワンの原理 $\pi(X) = \Phi(\Phi^{-1}(F_X(x)) - h)$

10.2 望ましい性質

保険料算出原理が持つべき性質をいくつか挙げる。

1. 安全割増の非負性
安全割増なので保険料が損害の平均より低いのはダメ
2. とりすぎないこと
損害額の上限より多くとるのは安全のためという名目に反する
3. 平行移動不変性
リスクに定額を追加した場合はそれがそのまま保険料に反映されるべき
4. 正の同次性
保険金が倍なら保険料も倍にすべき
5. 独立なリスクに対する加法性
関係ないリスクを合わせたときはそれら個別の保険料の和にすべき

[参考文献]

損保数理（日本アクチュアリー会）
会報別冊（日本アクチュアリー会）
例題で学ぶ損保数理（小暮雅一）