1　資産の挙動に関するモデル

※金融工学入門 (David G. Luenberger) の第 11 章の部分に相当します

1.1　二項格子モデル

証券 (現時点の価格 S) が次のある単位期間 (Δt) の間に，ある確率 p で上昇 (価格 uS) し，確率 $1-p$ で下落 (価格 dS) するモデルが二項格子モデルである．つまり株価 S の証券が次の時点で確率 p で uS になり，確率 $1-p$ で dS になると考えたモデル．ただし u, d は定数で $u > 1, 0 < d < 1$ を満たすものとする．

さて，ここで S_0 を初めの資産の価格とし，S_T を一年後の資産の価格とする．株価は正の値をとり続けるから対数をとって考えることができる．また ν を一年後の期待成長率，つまり一年後に今の資産より平均的にどれくらい増えるかを表わす割合，を表わすものとしよう．また σ を一年後の標準偏差，つまりどれくらい期待値からずれるか，を表わすものとしよう．具体的には

$$
\begin{aligned}
\nu &= \mathrm{E}\big[\ln(S_T/S_0)\big] \\
\sigma^2 &= \mathrm{var}\big[\ln(S_T/S_0)\big]
\end{aligned}
$$

と表わせる．期間長を 1 より十分小さい値を持つ Δt とする．実はこのとき二項格子パラメータ (つまり二項格子モデルを決めるパラメータ p, u, d) を

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\nu}{\sigma}\sqrt{\Delta t} \\
u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}
\end{aligned}
$$

とすると，$\Delta t \to 0$ の極限で期待値と分散が νとσ^2 に一致する．(天下り的であるがこれが正しいことが後に分かる．)

二項格子モデルは単純なモデルであるが，このモデルから有名な Black-Scholes 式が説明できる．数学的に厳密にやるにはかなり確率論に精通していなければならないが，この単純なモデルで実はある程度説明できる．

1.2　加法的モデル

次のモデルとして，加法的モデルをとりあげる．$S(t)$ を時点 t における証券の価格とする．$j = 0, 1, \cdots, N$ について**加法的モデル (additive model)** では

$$S(k+1) = aS(k) + u(k)$$

が成り立っている．この方程式では a は定数で, $u(k)$ は確率変数 である．$u(k)$ は価格を変動させる原因となる”ショック”，あるいは”錯乱”とみなすことができる．帰納的に

$$S(k) = a^k S(0) + a^{k-1}u(0) + a^{k-2}u(1) + \cdots + u(k-1)$$

であることが分かる．すなわち $S(k)$ は $a^k S(0)$ に k 個の確率変数を加えたものとなっている．確率変数 $u(k)$ は共通の分散をもつ独立な正規確率変数であると仮定することが多い．この場合，正規確率変数 (つまり $u(k) \sim N(\mu, \sigma^2)$) の線形和はやはり正規分布になる．$u(k)$ の期待値が 0 ならば $S(k)$ の期待値は

$$E\big[S(k)\big] = a^k S(0)$$

となる．

　このモデルには問題がある．一つはこのモデルでは価格が負になることもあり得る．また価格が上昇しても分散が増加せず σ^2 で一定である．つまりバブルでも株価の変動する幅が大きくならない．

1.3　乗法的モデル

　加法的モデルの欠点を修正したモデルが乗法的モデル (multiplicative model) である．これは

$$S(k+1) = u(k)S(k)$$

という形をしている (記号は 1.2 を踏襲する)．両辺 log をとって

$$\ln S(k+1) = \ln S(k) + \ln u(k)$$

として

$$w(k) = \ln u(k)$$

とすると

$$u(k) = e^{w(k)}$$

と表現される．実際その対数が正規確率変数となることから，各々の変数 $u(k)$ は**対数正規 (log normal) 確率変数**とよばれる．

$$\ln S(k) = \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} w(i)$$

となるので，$w(i)$ が互いに独立で期待値 $E(w(i)) = \nu$，分散 σ^2 の正規分布に従うならば

$$\begin{aligned} E\big[\ln S(k)\big] &= \ln S(0) + \nu k \\ var\big[\ln S(k)\big] &= k\sigma^2 \end{aligned}$$

したがって価格は正の値をとり，また価格の対数の期待値と分散が k に関して線形に増加する．加法的モデルの欠点が修正されている．

2　ランダムウォークとウィーナー過程

2.1　ランダムウォークからウィーナー過程への導入

　長さが Δt の期間が N 期あるとする．加法過程 z(加法的モデル) を $k = 0, 1, 2, \cdots, N$ について以下のように定義する．

$$\begin{aligned} z(t_{k+1}) &= z(t_k) + \varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t} \\ t_{k+1} &= t_k + \Delta t \end{aligned}$$

ただし $\varepsilon(t_k)$ は標準正規分布に従い，独立なものとする．これは一次元のより単純なランダムウォークの拡張である．単純なランダムウォークでは，上記のモデルで

$$\varepsilon(t_k) = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } 1/2) \\ -1 & (\text{確率 } 1/2) \end{cases}$$

としたものである．(どちらであっても $\varepsilon(t_k)$ の期待値は 0 分散は 1 である)

ここで $k>j$ として漸化式から

$$z(t_k)-z(t_j)=\sum_{i=j}^{k-1}\varepsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}\quad(\text{階差の和})$$

である．従って

$$\begin{aligned} E\bigl[z(t_k)-z(t_j)\bigr] &= E\bigl[\sum_{i=j}^{k-1}\varepsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}\bigr] \\ &= \sqrt{\Delta t}\sum_{i=j}^{k-1}E(\varepsilon(t_i)) \\ &= 0 \qquad (E(\varepsilon(t_i))=0) \end{aligned}$$

また $\varepsilon(t_k)$ の独立性を用いれば

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\bigl[z(t_k)-z(t_j)\bigr] &= E\Biggl[\ \biggl(\sum_{i=j}^{k-1}\varepsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}\biggr)^2\ \Biggr] \quad (E\bigl[z(t_k)-z(t_j)\bigr]=0\ \text{より}) \\ &= E\Biggl[\sum_{i=j}^{k-1}\varepsilon(t_i)^2\Delta t\Biggr] \quad (p\neq q\ \text{なら}\ E(\varepsilon(t_p)\varepsilon(t_q))=0) \\ &= \Delta t\sum_{i=j}^{k-1}E\bigl[\varepsilon(t_i)^2\bigr] \\ &= (k-j)\Delta t \quad (E\bigl[\varepsilon(t_i)^2\bigr]=1) \\ &= t_k-t_j \end{aligned}$$

となり分散が期間の長さに一致する．(というよりもこれが 0 でない有限値になるように $\sqrt{\Delta t}$ とした．でなければ分散の項に Δt が入りこんで $\Delta t\to 0$ の極限で発散または 0 に収束してしまい，モデルとして不適当になる．)

異なる二点間の差分を表わす確率変数が，区間が重ならない限り相関を持たないことは明らかである．つまり，$t_{k_1}<t_{k_2}\le t_{k_3}<t_{k_4}$ ならば $z(t_{k_2})-z(t_{k_1})$ と $z(t_{k_4})-z(t_{k_3})$ は無相関である．これらの差分はそれぞれ異なる ε からなり，互いに相関がないからである．

以上を踏まえて，ウィーナー過程の導入に入る．ウィーナー過程はランダムウォークを $\Delta t\to 0$ のとして極限をとることによって得られる．ウィーナー過程に従う方程式を形式的に

$$dz=\varepsilon(t)\sqrt{dt}$$

と書く．また以下の条件を満たす確率過程 $z(t)$ を**ウィーナー過程 (Wiener Process)**(あるいは**ブラウン運動 (Brownian motion)**) と呼ぶ．以下の 3 つの性質を持つ．

1.任意の $s<t$ について, $z(t)-z(s)$ が平均 0，分散 $t-s$ の正規確率変数となる．

2.任意の $t_{k_1}<t_{k_2}\le t_{k_3}<t_{k_4}$について，確率変数 $z(t_{k_2})-z(t_{k_1})$ と $z(t_{k_4})-z(t_{k_3})$ は無相関である．

3.確率 1 で $z(t_0)=0$ である．

この性質は先に述べたランダムウォークの性質に対応している．

ウィーナー過程は時間に関して微分不可能である．なぜならば

$$E\biggl[\frac{z(s)-z(t)}{s-t}\biggr]^2=\frac{s-t}{(s-t)^2}=\frac{1}{s-t}\to\infty$$

となり発散してしまうからである．しかし dz/dt という項を用いる項を役に立つこともある．この項は確率方程式にしばしばあらわれる．**白色ノイズ (white noise)** という言葉がよく使われる．

2.2　一般のウィー ナー過程と伊藤過程

一般化ウィーナー過程 (generalized Wiener process) は以下の式で表現される．

$$dx(t) = adt + bdz$$

ただし $x(t)$ はすべての t について確率変数，z はウィーナー過程，a と b は定数である．

一般化ウィーナー過程は解析的な解をもつ．両辺を積分して

$$x(t) = x(0) + at + bz(t)$$

である．

伊藤過程 (Ito process) は，それよりもやや一般的である．伊藤過程は以下の方程式で記述される．

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

上と同じように，z はウィーナー過程を表わす．一般的な解を解析的に表わすことはできない．

2.3　株価過程

乗法モデルを連続時間モデルに対応させたものは

$$d\ln S(t) = \nu dt + \sigma dz$$

である．但し νと$\sigma \geq 0$ は定数で，z は標準ウィーナー過程である．右辺の期待値は μdt なのでこれは平均値が dt に比例することを意味しており，$\ln S$ の変化量が時間の長さに比例している．これは乗法的モデルに対応している．また右辺の標準偏差は dz の σ 倍である．それゆえ $\sigma\sqrt{dt}$ のオーダーをもち，これもまた乗法的モデルに対応している．

このモデルは一般化ウィーナー過程であるから解析的解が求まり (両辺を積分すればよい)

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \nu t + \sigma z(t)$$

両辺の期待値をとると

$$E\big[\ln S(t)\big] = E\big[\ln S(0)\big] + \nu t$$

これは対数の期待値が t に関して線形に増加するので，この過程は**幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion)** と呼ばれる．

2.4　対数正規価格

上の幾何ブラウン運動は対数正規過程であるから $\ln S(t) \sim N(\ln S(0) + \nu t, \sigma^2 t)$ と表わせる．対数正規分布の期待値は

$$E\big[S(t)\big] = S(0)e^{(\nu + \frac{\sigma^2}{2})t}$$

である．また標準偏差は

$$\mathrm{stdev}\big[S(t)\big] = S(0)e^{(\nu + \frac{\sigma^2}{2})t}(e^{\sigma^2 t} - 1)^{1/2}$$

2.5　標準的な伊藤形式

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

これは幾何ブラウン運動の左辺で

$$d\ln S(t) = \frac{dS(t)}{S(t)}$$

を代入したものであるが，修正項 $\sigma^2/2$ が入っている．この修正項は**伊藤の定理 (Ito's Lemma)** で表わされる一般的な式変形の特殊な事例である．

2.6　伊藤の公式

伊藤の公式

z をウィーナー過程として，確率過程 x が伊藤過程

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

で定義されているものとする．また $y(t) = F(x,t)$ と定義されているとする．このとき $y(t)$ は次の伊藤方程式を満たす．

$$dy(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial F}{\partial x}bdz$$

伊藤の定理を使うと次のことが分かる．$S(t)$ が幾何ブラウン運動に従うものとする．伊藤の定理を使って過程 $F(S(t)) = \ln S(t)$ が従う方程式を導く．$a = \mu S, b = \sigma S$ とおく．また $\partial F/\partial S = 1/S$ で，$\partial^2 F/\partial S^2 = -1/S^2$ である．従って

$$\begin{aligned} d\ln S &= \left(\frac{a}{S} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{S^2}\right)dt + \frac{b}{S}dz \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \end{aligned}$$

となる．これにより伊藤形式における修正項が説明される．