ARMA (p, q) モデル

・$AR(p) + MA(q)$ のモデル

$$Y_t = \underbrace{c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p}}_{\text{AR部分}} + \underbrace{\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}}_{\text{MA部分}}$$

AR部分
定常性？

MA部分
- 定常性あり
- 反転可能性？

・AR部分が定常性をもつ ⇔ ARMA(p, q) が定常性をもつ.
・MA部分が反転可能である ⇒ ARMA(p, q) を AR(∞) 表現できる.

・計算において大事なこと.
・ε_t は $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \cdots$ や ε_i $(i \neq t)$ と独立だが, Y_t や Y_{t+1} とは独立でない.
・特に, $E(\varepsilon_t Y_t) = \sigma^2$ はよく使う.
∵ $Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$
で ε_t と独立でない項は ε_t だけなので, $E(\varepsilon_t Y_t) = E(\varepsilon_t^2)$

☆とりあえず, 練習2.14を解けるようになれば大丈夫だと思います.

2.14 ARMA(1,1)モデル $Y_t = 2 + \frac{1}{2} Y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3} \varepsilon_{t-1}$
$\varepsilon_i \sim N(0, 3^2)$
において $\mu = E(Y_t)$, $\gamma_h = Cov(Y_t, Y_{t-h})$ を求めよ.

(解答例)
両辺の期待値をとって, $\mu = 2 + \frac{1}{2}\mu$ $\quad \therefore \mu = 4$

$Y_t - \mu = \frac{1}{2}(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$ より

$$E\{(Y_t - \mu)^2\} = \frac{1}{2}E\{(Y_{t-1} - \mu)(Y_t - \mu)\} + E\{\varepsilon_t (Y_t - \mu)\} - \frac{1}{3}E\{\varepsilon_{t-1}(Y_t - \mu)\}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\gamma_1 + \sigma^2 - \frac{1}{3}E\{\boxed{\varepsilon_{t-1}}(\frac{1}{2}(\boxed{Y_{t-1}} - \mu) + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\boxed{\varepsilon_{t-1}})\}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_1 + \sigma^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{3}\sigma^2\right) = \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{51}{3}$$

同様に

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\gamma_0 + \overbrace{E\{\varepsilon_t (Y_{t-1} - \mu)\}}^{\text{独立}} - \frac{1}{3}E\{\varepsilon_{t-1}(Y_{t-1} - \mu)\}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_0 - \frac{1}{3}\sigma^2 = \frac{1}{2}\gamma_1 - 3$$

よって, $\gamma_0 = \frac{28}{3}$, $\gamma_1 = \frac{5}{3}$

$h \geq 2$ のとき, γ_h はMA部分を無視して計算できるから,
AR(1)の自己共分散を考え,

$$\gamma_h = \left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\gamma_1 = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}$$

$$\therefore \begin{cases} \gamma_0 = \frac{28}{3} \\ \gamma_h = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1} \quad (h \geq 1) \end{cases}$$