ラグ作用素で遊ぼう

次の級数計算をみてください.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} \cdot \frac{2s+1}{(s+1)!} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3!} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{4!} + \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{5!} + \cdots = 2. \tag{1}$$

念のため，数値計算の結果を示せば

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2!} = 1.75 \\
&1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3!} = 1.958333\cdots \\
&1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3!} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{4!} = 1.994792\cdots \\
&1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3!} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{4!} + \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{5!} = 1.999479\cdots
\end{aligned}$$

となって，かなり急速に 2 に近づいていることが分かります.

この類のおもしろい級数計算は，じつはラグ作用素を用いれば簡単に作成できるのです．あらためて，L を「前進ラグ作用素」としましょう．すなわち自然数 t について項 x_t を対応させる数列 $\{x_t\}$ について

$$Lx_t = x_{t+1} \tag{2}$$

とします．なお時系列分析ではむしろ「後退ラグ作用素」$\mathcal{L}$ によって

$$\mathcal{L}x_t = x_{t-1} \tag{3}$$

を考えることが普通ですが，これは前進ラグ作用素の逆作用素であって $\mathcal{L} = L^{-1}$ と書きます.

ラグ作用素を何回か連続して用いるときには L^n とまとめて書きます．これは

$$L^n x_t = L^{n-1}(Lx_t) = L^{n-1}x_{t+1} = \cdots = x_{t+n}$$

と解釈します.

(ex)　数列 $x_t = \sqrt{t}$ を考えます．このとき $Lx_t = \sqrt{t+1}$ であり，さらに

$$L^2 x_t = \sqrt{t+2},\ (1 - 2L + \mathcal{L}^2)x_t = \sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t-2}$$

などと計算します.

ラグ作用素の計算では，次の公式が洒落ています.

定理：ノイマン級数展開　任意の実数 $|a| < 1$ について，作用素 $1 - aL$ の逆作用素は

$$(1 - aL)^{-1} = 1 + aL + a^2L^2 + a^3L^3 + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} a^s L^s. \tag{4}$$

証明は容易です．適当な数列 $\{x_t\}$ を用意しましょう．これに $1-aL$ を施せば

$$(1-aL)x_t = x_t - ax_{t+1}$$

となるだけです．つぎにこの結果に $\sum_{s=0}^{\infty} a^s L^s$ を作用させると

$$\sum_{s=0}^{\infty} a^s L^s (x_t - ax_{t+1}) = (x_t - ax_{t+1}) + a(x_{t+1} - ax_{t+2}) + a(x_{t+2} - ax_{t+3}) + \cdots$$

となって，隣あう項が打ち消しあうので $\sum_{s=0}^{\infty} a^s L^s (x_t - ax_{t+1}) = x_t$ が得られます．

つまり，任意の x_t に $(1-aL)$ を作用させてから，さらに $\sum_{s=0}^{\infty} a^s L^s$ を作用させればもとの x_t に戻ることが確認できたので，これより定理が証明できました． [QED]

冒頭の公式は，じつはこの定理から作っています．いま，$x_t = 1/t!$ としましょう．また $a = 1/2$ として

$$\left(1 - \frac{1}{2}L\right)\frac{1}{t!} = \frac{1}{t!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(t+1)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t+1}{(t+1)!}$$

を得ます．この結果に $\sum_{s=0}^{\infty} L^s/2^s$ を施せば，定理よりもともとの $1/t!$ に戻るはずです．すなわち

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} L^s \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2t+1}{(t+1)!}\right] = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} \left(\frac{2(t+s)+1}{(t+s+1)!}\right) = \frac{1}{t!}$$

が成り立ちます．最後に，$0! = 1$ であることに注意して $t = 0$ を代入すれば，冒頭の数式が得られるのです．

練習問題

$a = 1/2$, $x_t = 1/t$ として

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} \cdot \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{1 \times 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2 \times 3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3 \times 4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{4 \times 5} + \cdots$$

を計算してみよ．また

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{3^s} \cdot \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{4}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{9} \cdot \frac{6}{3 \times 4 \times 5} + \cdots$$

を計算せよ．