

1 δ 関数を用いた離散確率分布の密度関数

ゼミとは直接関係なく個人的なものです．離散確率変数と連続確率変数の和の分布を考えてみたいと思います．

δ 関数は

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

という性質を持った関数です．またもう一つ重要な性質として

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

が成り立ちます．これは $x \neq x_0$ のとき $\delta(x - x_0) = 0$ なので

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) \delta(x - x_0) dx \\ &= f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

と考えられます．

以上を踏まえて離散と連続の確率変数の和について考えたいと思います．まず具体的に考えます． X を標準正規分布に従う連続確率変数とする． Y をサイコロを一回振ったときに出た目を表わす離散確率変数とする． Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}(\delta(y-1) + \delta(y-2) + \delta(y-3) + \delta(y-4) + \delta(y-5) + \delta(y-6))$$

と表わせる．全空間で積分すれば 1 になり， $y f_Y(y)$ の全空間での積分値は期待値 $7/2$ に等しくなることを確かめられると思います．(離散のときは，正の確率をもつ点では確率密度が無限である，ことを考えれば良いと思います)

このとき畳み込み積分を用いて

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-s) f_Y(s) ds \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-s) (\delta(s-1) + \delta(s-2) + \delta(s-3) + \delta(s-4) + \delta(s-5) + \delta(s-6)) ds \\ &= \frac{1}{6} (f_X(t-1) + f_X(t-2) + f_X(t-3) + f_X(t-4) + f_X(t-5) + f_X(t-6)) \end{aligned}$$

と求められます．これは平均が $7/2$ の分布ですね．また $t = 7/2$ の軸に関して対称です．

より一般的に Y の確率密度関数を

$$f_Y(y) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \delta(x - a_j) \quad (p_j = P(\{x = a_j\}))$$

とします．同じように和の分布を畳み込み積分を用いて

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-s) f_Y(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-s) \left[\sum_{j=0}^{\infty} p_j \delta(s - a_j) \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-s) p_j \delta(s-a_j) ds \quad (\star) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_j f_X(t-a_j)
\end{aligned}$$

と表わせます．当たり前ですが，期待値は

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} t f_{X+Y}(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} t \sum_{j=0}^{\infty} p_j f_X(t-a_j) dt \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_j \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t-a_j) dt \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_j \int_{-\infty}^{\infty} (u+a_j) f_X(u) du \quad (t-a_j = u \text{ と変換}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_j \left[a_j \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_j a_j + E(X) \sum_{j=0}^{\infty} p_j \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

となります．

以下は(★)等で積分と Σ で入れ替えていいのが少し考えたいと思います．正直大体入れ替えていいんじゃないか
 と思います笑 ただ今回は δ 関数という特殊なものなので，入れ替えができるかどうか考えてみても面白いかと．

δ 関数の性質から，まず δ 関数が可測関数かどうかだけ調べます．全ての実数 a に対して

$$\{x \mid \delta(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & (a < 0) \\ x = 0 & (a \geq 0) \end{cases}$$

零集合は可測で， $\mathbb{R}$ も可測なので $\delta(x)$ は可測関数です．このとき $\{p_j \delta(x-a_j)\}_{j=0}^{\infty}$ は非負可測関数列なのでB.Levi
 の定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-s) \left[\sum_{j=0}^{\infty} p_j \delta(s-a_j) \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-s) p_j \delta(s-a_j) ds$$

が成り立つ．

言い訳ですがこの辺の話は勉強中なので間違い等があればコメント等お願いします！