正規分布の再生性 について

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$　$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ について。

$X_1' = (X_1 - \mu_1)/\sigma_1$　$X_2' = (X_2 - \mu_2)/\sigma_2$ とすると　$X_1', X_2' \sim N(0,1)$ であり（標準化）

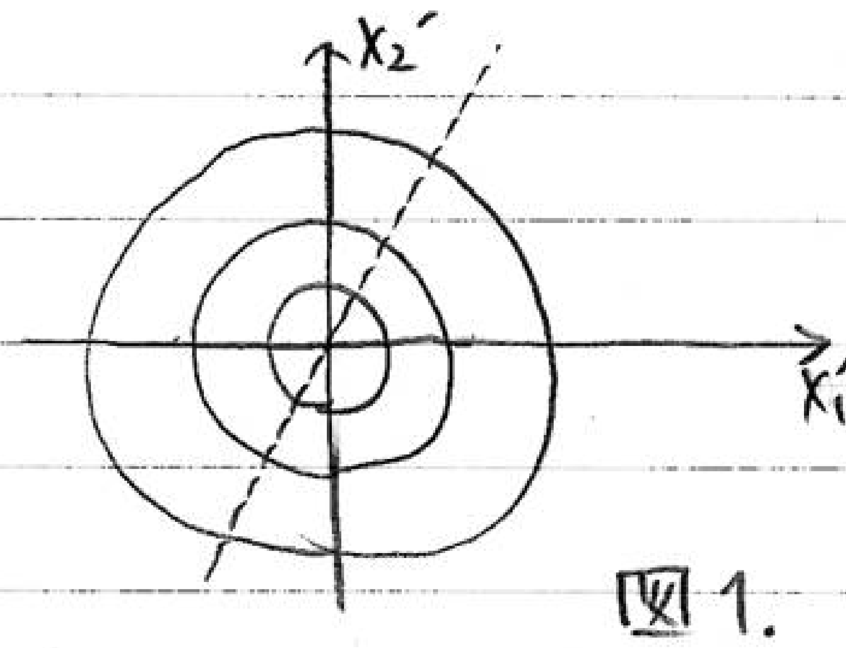


図1.

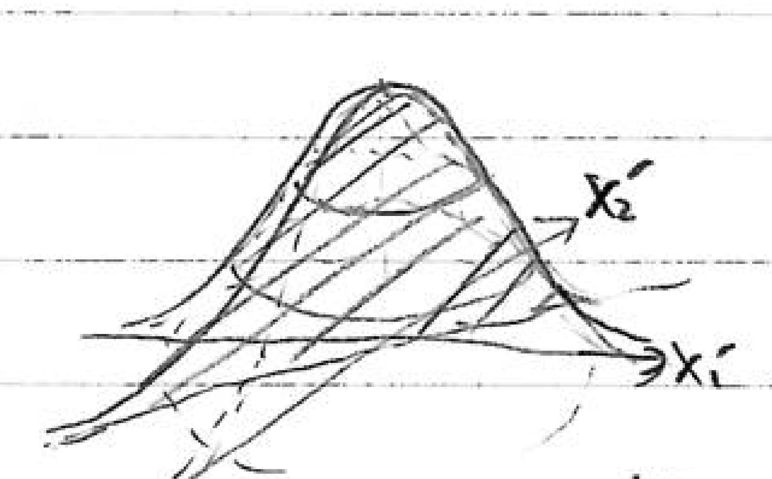


図2

(X_1', X_2') の分布は $(0,0)$ 対称な分布となる。

このとき、原点を通るように直線で切る断面は全て $N(0,1)$ の分布と等しくなることは対称性から明らかである。……(※)

↙軸の縮尺を調節

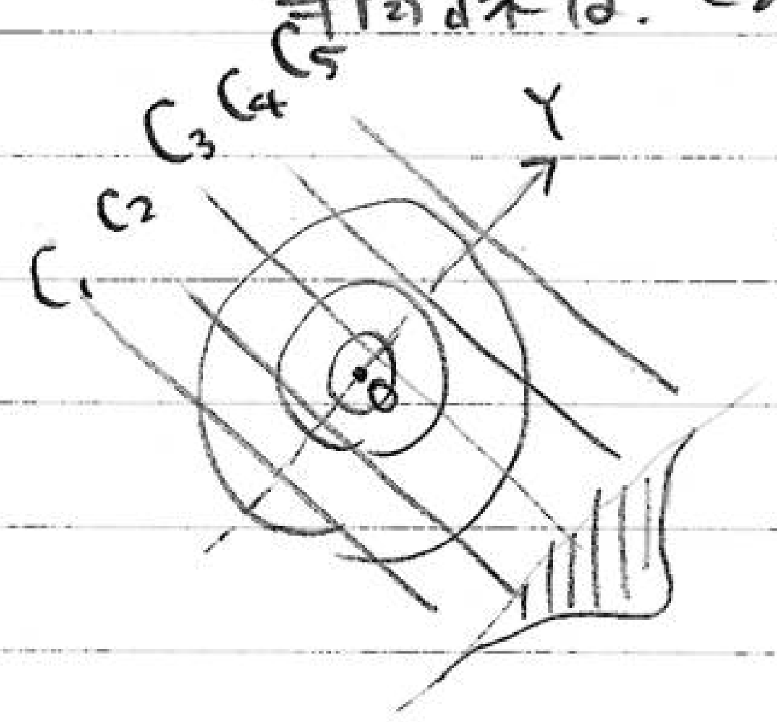
つまり、$aX_1' + bX_2'$（ただし $a^2+b^2=1$）の分布は $N(0,1)$ に従う。

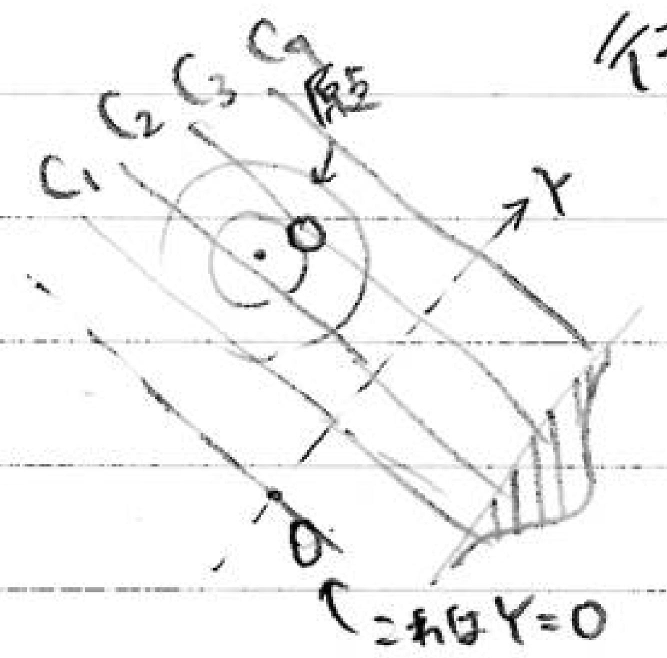
ここで $a = \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$，$b = \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}(X_1 + X_2 - \mu_1 - \mu_2) \sim N(0,1)$$

つまり $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ である。

(※)　X_1, X_2 を用いた新たな変数 Y の分布を求めるためには Y の等高線で積分を行う操作（たたみこみ）が必要になるが、$aX_1' + bX_2'$ のように線型の場合等高線は、それに直交する直線であり、対称性からこれは原点を通るどの直線について行っても同様の分布となることがわかる。





なお原点を外れていたとしても分布は平行移動をするだけで形は変化しないことがわかるだろう。

あと"断面が N(0.1) 分布"というと少し誤解を招きそうだが、断面のグラフは正しくは $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}N(0,1)$ であり、厳密には(※)の意味で使ったことに注意。