確率過程への30講

～確率論の基礎から数理ファイナンスへの応用まで～

清水　泰隆
大阪大学大学院基礎工学研究科

”データ科学チュートリアル”

平成18年4月 全2回

このチュートリアルでの目標

・確率過程とは何か，数学的な定義を理解しよう（測度論的確率論）.

・基本的な確率過程であるBrown運動とは何か？

・日本が世界に誇る**"伊藤の公式"**について，知ったかぶりができるように.

・応用として，近年人気の数理ファイナンスを紹介．ノーベル賞理論を知ろう.

※スライドの中に出てくる演習問題を $\boxed{\quad\quad\quad}$ だけ解答しレポートとせよ.

第１回

・確率論の数学的基礎

—— 普段あまり意識しない，確率変数や確率法則の数学的側面を復習する.

・確率変数→確率変数列→確率過程と自然に拡張していく.

第２回

・基本的な確率過程であるブラウン運動の構成.

・マルチンゲール，確率積分，確率微分方程式など確率解析の初歩を直感的に解説.

・数理ファイナンスへの応用〜Black-Scholes-Merton 理論〜を紹介.

第１講：確率空間

いつものようにサイコロの例から始めよう：

Ex. 1 $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$とし，$\Omega_1 \to \mathbf{R}$の関数$X_1$を次のように定める：任意の$\omega_k \in \Omega_1$に対して，$X_1(\omega_k) = k$．これは，サイコロを１回投げて出る目を$X_1$で表わしていると見ることができる.

実際は，サイコロを投げた時ランダムに$\omega \in \Omega$が選び出されて"目"が決まる．このωを**根元事象**と呼ぶ．根元事象を選ぶのは**神**である．神は，ある法則Pにしたがってこれを決める.

　神の法則は知る由もないのだが，数学では通常，理想的な状況を考えて，神は各目に対して平等な確率を与えていると考える．そこで，法則P_1は**確率法則**：

$$P_1(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega_1} \quad (\omega \in \Omega)$$

で与えられていると考える事にする(Laplace流の定義).

このようにして，サイコロを１回投げて各目の出る確率法則が決まったが，これでは不十分である．例えば,

Q．サイコロを振って２, または３の目が出る確率は？

という問いには答えられない．そこで，さらに詳細に確率法則を定めよう．

$\mathscr{F}_1$を，Ω_1の部分集合全体からなる族とする．すなわち，

$$\mathscr{F}_1 = \{\phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_6\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_5, \omega_6\}, \ldots, \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}\}$$

任意の$A \in \mathscr{F}_1$に対して，確率法則P_1を

$$P_1(A) = \frac{\#A}{\#\Omega_1},$$

で定める（ただし，$\#\phi = 0$と約束する）と，これは先の確率の自然な拡張で，これによって全ての事象の確率が定まることになる．

演習 1 上のP_1の定義より，高校でも習った**”確率の和の法則(加法定理)”**を導け．すなわち，事象A, Bが同時に起こらないとき$(A \cap B = \phi)$,

$$P_1(A \cup B) = P_1(A) + P_1(B)$$

を示せ．

定義 1 集合Ωに対して，以下の性質を満たすΩの部分集合族$\mathscr{F}$を**有限加法族**という.

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$.

(ii) For any $A \in \mathscr{F}$, $A^c \in \mathscr{F}$.

(iii) For any A, $B \in \mathscr{F}$, $A \cap B$ and $A \cup B \in \mathscr{F}$.

演習 2 $\mathscr{F}_1$が有限加法族であることを示せ.

定義 2 以下の性質を満たす $\mathscr{F}$ 上の写像 P を, $\mathscr{F}$ 上の**有限確率測度**とよぶ.

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$ for any $A \in \mathscr{F}$.

(ii) $P(\Omega) = 1,\ P(\phi) = 0$.

(iii) For $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ with $A_i \cap A_j = \phi\ (i \neq j)$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad \textbf{(有限加法性)}$$

演習 3 P_1 が $\mathscr{F}_1$ 上の 有限確率測度であることを示せ.

これらの性質を満たす三つ組み $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を**有限確率空間**という.

演習 4 サイコロ 1 回投げで作った三つ組みは有限確率空間であることを示せ.

注意 1 P を" 測度" と呼ぶのは，P が $\mathscr{F}$ の集合の，ある意味での" 大きさ (測度)" を測っている，と考えている．一方，$\mathscr{F}$ 以外の集合については何も決めていない. この意味で $\mathscr{F}$ は**可測集合**と言われることもある．測度 P によって「測ることが可能な集合」という意味であろう.

演習 5 サイコロを N 回投げる試行について，有限確率空間 $(\Omega_N, \mathscr{F}_N, P_N)$ を構成せよ.

第２講：確率変数の定義

さて，サイコロ１回投げで作った有限確率空間$(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$を考える．この上に最初に作った写像$X_1(\omega_k) = k$のことを，我々は通常「確率変数」と呼んでいる．そして，$X_1 = k$となる確率がp_kであることを，

$$P_1(X_1 = k) = p_k$$

などと書き表す.

普段は意識しないかも知れないが，P_1が可測集合$\mathscr{F}_1$上の確率測度であることを思い出すと，測度論的には，この記号に深い意味があることに気付くだろう．それは次の２つの意味を持っている：

(1) 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して，$A_k = \{\omega \in \Omega\,;\, X_1(\omega) = k\} \in \mathscr{F}_1$.

(2) 上の $A_k \in \mathscr{F}_1$ に対して $P_1(A_k) = p_k$.

つまり，"A_k という可測集合の P による測度を測っている"，と考えられる.

確率 P_1 は $\mathscr{F}_1$ の元に対してしか定められていないので，(1) が無いと，そもそも確率を計算できない．だから,「確率変数」には (1) が欠かせない条件である．そして，(1) と (2) のことを幾分省略して $P_1(X_1 = k) = p_k$ の様に書くのである.

注意 2 これらのことは普段は特に意識する必要はないが，このような基礎を知らないと，確率過程を考える時など，Ω としてもっと巨大な集合を考える段階で混乱を生ずるかもしれない.

では，確率変数の数学的定義を与えておこう．

定義 3 一般に，任意の $r \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) > r\} \in \mathscr{F} \tag{1}$$

を満たす実数値関数 X のことを $\mathscr{F}$-**可測関数**といい，(有限) 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathscr{F}$-可測関数の事を**確率変数**という．

注意 3 後で，確率空間を拡張して"有限"というのを取り除くが，その場合の確率変数の定義も全く同様である．

演習 6 上の X_1 が確率変数の定義を満たすことを示せ．

第３講：確率分布

先に書いた $P_1(X_1 = k) = p_k$ に対して，これが全ての $k \in \mathbf{N}$ について定義されている時，$\mathbf{N}$ 上の関数 $P^{X_1}(k) = p_k$ のことを $\boldsymbol{X_1}$ **の分布**と言ったりするであろう．

これを正確に書くと，

$$P^{X_1}(k) := P(\{\omega \in \Omega\,;\, X_1(\omega) = k\}) = P(X_1^{-1}(k)) \tag{2}$$

となる．この意味で $P^{X_1}(k)$ のことを $PX_1^{-1}(k)$ と書いたりもする．

こうして新たな確率空間 $(\mathbf{N}, \mathscr{F}^{\mathbf{N}}, P^{X_1})$ が出来上がる．こうしてみると，X_1 の分布とは，X_1 がとる値の集合上に定義される新たな確率測度のことである．この意味で，P^{X_1} のことを**" X_1 によって誘導される測度 (induced measure)"** などと呼ぶこともある．

定義 4 (有限) 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率変数 X に対し，

$$P^X(A) = P(\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in A\}) \quad \text{for } A \subset \mathbf{R} \tag{3}$$

として定義される確率法則 P^X (あるいは PX^{-1}) を，X の**確率分布**，あるいは X の**法則**とよぶ.

注意 4 あとで" 有限" を取り除いても，この定義は使える.

演習 7 $\mathscr{F}^X$ を $\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in A, A \subset \mathbf{R}\} \in \mathscr{F}$ となるような集合 A 全体からなる族とする．このとき，$\mathscr{F}^X$ は有限加法族になることを示せ.

元々の確率空間を考えるより，新しく出来た $(\mathbf{R}, \mathscr{F}^X, P^X)$ なる全く別の確率空間を考える方が，しばしば有用である.

注意 5 分布 P^X が分かれば，元々の確率測度 P を意識することなく確率計算が可能になる．多くの応用的な教科書がこの分布の紹介から入るのはこのためである.

第４講：σ-加法族

これまでは$\mathscr{F}$が有限個の集合しか含まない例であった．しかし，次のような例を考えよう．

Ex. 2 サイコロを何回も投げ続ける試行を考えて，次のような集合を考える：

$$\begin{aligned}\Omega_\infty &:= \left\{\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(n)}, \ldots)\,;\, \omega^{(i)} \in \Omega_1\right\},\\ \mathscr{F}_\infty &:= \{\text{All subsets of } \Omega_\infty\}.\end{aligned}$$

この$\mathscr{F}_\infty$は有限加法族であると同時に，次の性質も満たしている：

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}_\infty \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}_\infty. \tag{4}$$

このような$\mathscr{F}_\infty$を，**σ-加法族**という．

第５講：確率測度

定義 5 先に有限確率測度を定めたが，それに加えて以下の**完全加法性**と言われる性質を満たすものを**確率測度**という.

$$
\begin{aligned}
& A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}_\infty \text{ with } A_i \cap A_j = \phi \ (i \neq j) \\
& \qquad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).
\end{aligned} \tag{5}
$$

一般には次の**劣加法性**が成り立つ.

$$
A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}_\infty \quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{6}
$$

第６講：可測空間

一般に，集合 E とその部分集合族 $\tilde{\mathscr{E}}$ が与えられたとき，$\tilde{\mathscr{E}}$ を含む最小の σ-加法族 $\mathscr{E}$ を生成することが出来て，これを通常 $\mathscr{E} := \sigma(\tilde{\mathscr{E}})$ などと書く．

定義 6 これらによる組 $(E, \mathscr{E})$ を**可測空間**という．

注意 6 普段，統計をやっていてこの σ-加法族のことを意識することは少ないであろう．しかし，確率過程を扱う時には欠かせない重要な概念である．

　後で，**”フィルトレーション”** といわれる σ-加法族の増大列を考えるが，これは確率過程から得られる**情報**の一種である (これは後述).

第７講：確率空間の拡張

Ex.2の例では$\#\Omega_\infty = \infty$であるので，もはや$P_\infty(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega_\infty}$のような定義は意味がない．そこで，次のように確率法則を定義しよう：

サイコロをk回投げた時に起こる事象は$\boldsymbol{A_k} \in \mathscr{F}_\infty$は，$A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{F}_1$に対して

$$\boldsymbol{A_k} := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times \Omega_1 \times \Omega_1 \times \cdots$$

の形の集合の直和で生成されるので，

$$P_\infty(\boldsymbol{A_k}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\#A_i}{\#\Omega_1}$$

としておけば，完全加法性により$\mathscr{F}_\infty$上の確率を定めることができる．

この $(\Omega_\infty, \mathscr{F}_\infty, P_\infty)$ は，先の有限確率空間から拡張された確率空間と言えよう.

定義 7 このように，Ω の部分集合族から生成された σ-加法族 $\mathscr{F}$ と，その上の確率 P らによる三つ組み $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を**確率空間**という.

第８講：確率変数の一般化

前章で作った確率空間$(\Omega_\infty, \mathscr{F}_\infty, P_\infty)$の上に，次の確率変数を定義する：

$$\begin{aligned} X_n(\omega) &= X_1(\omega_n), \\ S_n(\omega) &= \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \\ &= X_1(\omega_1) + X_1(\omega_2) + \cdots + X_1(\omega_n). \end{aligned}$$

これはそれぞれ，n回目のサイコロの目，n回目までのサイコロの目の和を表わす確率変数である．

演習 8 各nに対して，これらが確率変数であることを示せ．

これらを束にした次のような確率変数列を考えよう：

$$\boldsymbol{X} = \{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \boldsymbol{S} = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{7}$$

このような無限個の確率変数列を考えても，確率変数の定義を拡張する事によって，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{S}$ がそれ自体 $(\Omega_\infty, \mathscr{F}_\infty, P_\infty)$ 上の一つの確率変数とみなすことが出来る．

そこで，確率変数の定義を一般化しておこう．

定義 8 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の写像 X が，ある可測空間 $(E, \mathscr{E})$ 上に値をとるとする．このとき，任意の $A \in \mathscr{E}$ に対して，

$$\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in A\} \in \mathscr{F} \tag{8}$$

となる時，X を **$\boldsymbol{E}$-valued random element ($\boldsymbol{E}$-値確率変数)** という．

前講の例の $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{S}$ を E-値確率変数とみるには？

E を無限実数列全体からなる集合とすれば，そこに適当な位相 (開集合族) を入れて，その位相から σ-加法族 $\mathscr{E}$ を作る事によって (これを位相的 σ-加法族という)，E は可測空間となる．

ここに前項の定義を当てはめれば，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{S}$ は E-valued r.e. と見ることが出来る．

また，この例では E として Ω と同じものを取ればよい．

第９講：離散時間型確率過程

さて，確率変数列がある確率空間上の確率変数として定まることを見たが，これを言い直して確率過程を定義する．

定義 9 この確率変数列による E-valued random element $\boldsymbol{X}$ や $\boldsymbol{S}$ のことを**離散時間型確率過程**と言う．

してがって，確率過程とは無限次元確率空間上に値を取る確率変数のことである．

離散時間型と言っているのは，添字 n が離散的であるという意味である．この添字は通常，時間のパラメータであることが多いので,「〜時間型 $\cdots$ 」という言い方をする．

注意 7 確率過程の一般的でよくなされる定義は

定義 10 集合 $\mathscr{T}$ で添数付けられた，ある確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上に定義された確率変数の族 $\{X_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ を確率過程という.

であり，これは直感的にも分かりやすい定義である．しかし，確率過程は上のように，ある確率空間上の一つの確率変数のようにも定義される．したがって，その分布も通常の確率変数の場合と同様にして定義される．つまり，random element という観点からは確率過程としてなんら特別な定義は必要としない．異なるとすれば，通常考える確率変数は Ω_1，Ω_N のように有限次元の集合であるが，確率過程の空間である Ω_∞ は**無限次元**の集合であるという点である.

統計推測などで確率過程の尤度などを考える場合には，このような見方をする方が理解しやすい.

演習 9 E-valued random element の分布はどのように定義されるべきか？その定義を書いてみよ.

第10講：確率過程のパス

前章では$\mathscr{T} = \mathbf{N}$であるような確率過程の例を作った．この章では$\mathscr{T} = \mathbf{R}_+$であるような**連続時間型確率過程**を定義する．

先のサイコロを投げ続けるという例では，Ω_1として最初から$\{1, 2, \ldots, 6\}$という集合を選んでおけば，ある根元事象$\omega \in \Omega$を取り出したとき，ωの要素の列$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots,$がそのままサイコロ投げの**実現値**(**パス**ともいう)として採用できることになり便利であろう．こうして選ばれた$(\Omega, \mathscr{F}, P)$を**canonical space**という．

さて，我々の目標は連続的に値が変化する確率過程を定義することであり，たとえば，その**パス(path)**が連続な関数で表わされるようなものを考えたい．そのためには，離散時間型のアナロジーとして，次のようなcanonical spaceを考えればよかろう．

C：$[0,\infty)$ 上の連続関数全体の集合，$\mathscr{F}^C$：下の距離による位相的 σ-加法族.

$$d(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left\{\sup_{t\in[0,n]}|\omega_1(t)-\omega_2(t)|\wedge 1\right\}\qquad(\omega_1,\omega_2\in C).$$

これによって $(C,\mathscr{F}^C)$ は可測空間となる (これを C-space と言ったりする).

演習 10 上の d は C 上の距離になることを示せ (広義一様収束距離という).

そこで，$\mathscr{F}^C$ 上に何らかの確率測度 P を定めて確率空間 $(C,\mathscr{F}^C,P)$ 上の確率変数 X を，

$$X_t(\omega)=w(t),\qquad(\omega\in C)$$

のように定める (これを canonical process とか**座標関数**と言ったりする)．この X は，C-値確率変数と見ることができる．すなわち $\mathscr{F}^C$-**可測関数**である.

第11講：C-space上の確率法則

例えばEx.1の場合には，$\mathscr{F}_1$ の元の形から $\mathscr{F}_1$ 上の確率測度 P_1 を定めることができた.

Q．では，$\mathscr{F}^C$ の元とはどんな形だろうか？

これは無限次元空間上の開集合によって生成される集合であって想像しにくい.

離散時間の場合を思い出そう：有限次元に落ちた集合 $\boldsymbol{A_k}$ を考え，その上で確率を定め，完全加法性によって $\mathscr{F}_\infty$ 上の確率を定義したのであった.

この方法を真似て見よう.

C の部分集合として，$0 \leq t_1 < \cdots < t_k$ と $\mathbf{R}$ の可測集合 $A_i \in \mathscr{F}^R$ に対して，

$$\boldsymbol{A_k} := \{\omega \in C\,;\, \omega(t_1) \in A_1, \ldots, \omega(t_n) \in A_k\}$$

という形の集合を考える．このような集合は**筒集合 (sylinder sets)** といわれる．

このような形の集合全体を $\mathscr{A}$ と書くと，次のことが成り立つ：

定理 1 $\mathscr{F}^C = \sigma(\mathscr{A})$

この定理の意味するところは，筒集合上で確率 P を定めることが出来れば，再び完全加法性によって $\mathscr{F}^C$ 上の確率を定めることができるということである．

演習 11 上の筒集合は，第７講で述べた集合 $\boldsymbol{A_k}$ の類似である．そこで，Ex.2 のサイコロ投げの例において，上の $\mathscr{A}, \mathscr{F}^C$ に相当するものは何か？また，この離散的な場合にも上の定理１が成り立つことを説明して見よ．

第12講：有限次元分布

前の定理をもう少し具体的に言うと，任意の $k \in \mathbf{N}$ と任意の $A_i \in \mathscr{F}^R$ に対して，

$$P(\boldsymbol{A_k}) = P_k^\omega(A_1, A_2, \ldots, A_k)$$

なる $\mathbf{R}^k$ 上の分布 P_k^ω を定めることが出来れば，それを用いて $\mathscr{F}^C$ 上の確率法則 P を定めることができる，ということである．

このような分布 P_k^ω を考える方が，訳の分からない無限次元空間 $(C, \mathscr{F}^C)$ 上の分布を考えるより，よほど直感的に理解しやすいだろう．

定義 11 この分布を X の**有限次元分布**という．

具体的な P_k^ω の決め方については，離散時間型で" サイコロ投げ" を取り上げたように，確率過程 X を具体的に決めないと無理であるが，後に，X が **Brown 運動**の場合について具体的に P_k^ω を定めることにしよう．

第13講：確率過程の分布

前講までで，確率空間$(C,\mathscr{F}^C,P)$と，その上の確率過程$X(\omega)$が(canonical process として)定まった．

初心に戻ってこのことを説明すると,「根元事象$\omega\in C$が神の法則Pによって選ばれた時，我々は現象として$X=\{X_t(\omega)=\omega(t)\}_{t\in[0,\infty)}$というパスを観測する」ということである．

我々はこの確率過程をωなどを省略し，単に$X=\{X_t\}_{t\geq 0}$と書く．

X はやはり C-space 上に値を取るので，X の C 上の法則 (分布) が次のように定まる：

$$P^X(A) = P(X^{-1}(A)) \qquad \text{for } A \in \mathscr{F}^C.$$

だから，最初から canonical space $(C, \mathscr{F}^C, P^X)$ を考えるのである．

注意 8 確率過程の統計推測で，尤度関数を考える場合には，この確率法則 P^X に対するある種の **"密度"** を考える事になる．これは，通常 IID 列 $\boldsymbol{X} = \{X_k\}_{k=1}^n$ の $\mathbf{R}^n$ 上での確率分布

$$P^X(A) = \int \cdots \int_A f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad (A \subset \mathbf{R}^n)$$

の密度を使って尤度を構成することと全く類似している．

注意 9 一般には，確率過程の尤度を作る際に有限次元分布を用いる事は出来ない！確率過程を「添数付けられた確率変数の族」と解釈するだけでは，統計推測において尤度を構成する際に戸惑う事になろう．

第14講：D-space

連続なパスをもつ確率過程があるなら，もちろん不連続なパスをもつ確率過程もある．これについては高度すぎるので，今回はパス.

しかし，確率空間の構成の手順は，C-spaceの場合と同様である．すなわち，

D：**右連続左極限**を持つような関数全体の集合を用意する.

ある"**距離**"を入れて，位相的σ-加法族$\mathscr{F}^D$を作る.
※ $(D, \mathscr{F}^D)$をD-spaceという.

筒集合上の確率法則から$\mathscr{F}^D$上の確率測度が定まる.

という具合である.

現在応用で用いられる主要な確率過程は，このD-space上のものが多い.

第15講：ランダム・ウォーク

さて，ここからは具体的な確率過程の例を見ていこう．
以下に定義するランダム・ウォークは，最も基本的な離散時間型確率過程である．

定義 12 $X_1, X_2, \dots$ を独立な確率変数列で，次の確率分布を持つとする：

$$P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

このとき，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ によって定義される確率過程 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**ランダム・ウォーク**という．

これは，大数の法則や中心極限定理などを学ぶ時におなじみの独立確率変数列の和の特別な場合である．次に紹介する**ブラウン運動**の離散時間バージョンである．

演習 12 S_n を定義するための canonical space を構成せよ．

◆次回予告

・次回，C-space上に**Brown運動**を構成する．それは，最も重要で好ましい性質を持つ基本的な確率過程である．構成方法はいろいろあるが，今回の方針にしたがって，離散時間型確率過程の延長に連続時間確率過程であるBrown運動が現れることを述べる．すなわち，**ランダム・ウォーク**のある種の極限としてBrown運動を構成する．

・フィルトレーションと言われる確率過程特有の概念について説明する．それは，確率過程の持つ**情報**を表わすものである．

・マルチンゲール，確率積分など，確率解析の基本的な道具とその応用について概観する．

第16講：ブラウン運動の歴史

・1827年：Robert Brown（植物学者・英）
— 花粉の中の微粒子の水面での不規則運動が物理現象であることを発見.

・1905年：Albert Einstein（物理学者・独）
— 媒質中の微粒子の運動は熱方程式によって記述できると予言.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \xi(x) \ \Rightarrow\ u(t,x) = \int_R \xi(y)\phi(t,x,y)\,dy$$

ここで，$\phi(t,x,y) = (2\pi t)^{-1}\exp(-(y-x)^2/2t)$ は**熱核**といわれる.

・1908年：Jean Perrin（物理学者・仏）
— Einsteinの理論を実験的に証明.

参考：`http://www.tokoha-u.ac.jp/~ishikawa/brown-v2/index.html`

実は，その陰で $\cdots$
・1900年：Louis Bachelier（経済学者・仏）
— 博士論文 "Theorie de la Spéculation".

Einsteinの論文から約20年後，数学者WienerやLévyにより，現代確率論の枠組みでBrown運動が定義されてくる.

第17講：Wiener空間とWiener測度

定理 2 連続関数全体からなる可測空間$(C, \mathscr{F}^C)$上の確率法則P_μで，その有限次元分布Q_nが以下を満たすようなものが唯一つ存在する：任意の$n \in \mathbf{N}$，$0 < t_1 < \cdots < t_n$，$E_0, E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{F}^{\mathbf{R}}$に対し，

$$\begin{aligned} & Q_n(E_0, E_1, \ldots, E_n) \\ &\quad = P_\mu \{\omega \in C \,;\, \omega(0) \in E_0, \omega(t_1) \in E_1, \ldots, \omega(t_n) \in E_n\} \\ &\quad = \int_{E_0} \mu(dx) \int_{E_1} \phi(t_1, x, x_1)\, dx_1 \int_{E_2} \phi(t_2 - t_1, x_1, x_2)\, dx_2 \\ &\qquad \cdots \int_{E_n} \phi(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_n. \end{aligned}$$

ここに，$\phi(t, x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$である．

定義 13 このP_μを，初期分布μをもつ**Wiener測度**という．また，これらの三つ組み$(C, \mathscr{F}^C, P_\mu)$からなる確率空間を**Wiener空間**という．

第18講：Brown運動，またはWiener過程

定義 14 確率空間$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上で定義された確率過程$B = \{B_t\}_{t\geq 0}$で，その確率分布$P^B(= PB^{-1})$が，初期分布μをもつWiener測度であるものを**Brown運動**，または**Wiener過程**という．特に，μが点$x \in \mathbf{R}$上の1点分布の時，Bは$\boldsymbol{x}$**を出発するBrown運動**という．

Canonical spaceとしては，次のようなものを考えればよい：

確率空間として，最初から$(C, \mathscr{F}^C, P_\mu)$を考えて，

$$B_t(\omega) = w(t) \quad (\omega \in C)$$

によって確率過程Bを定義すると，Bの確率分布は自動的にP_μとなる．つまりこのBはBrown運動である．

注意 10 これは前回，canonical processと呼んだものであるが(第10講参照)，**座標関数（cordinate function）**などと呼ぶ本もある．

第19講：Brown運動の構成

これで，厳密にBrown運動の存在が示された．しかし，これは抽象的な定義であり，これだけでは具体的な性質は見えにくい．

Q．確率過程 B はどのようなパスを持っていて，どうやって構成するのか？

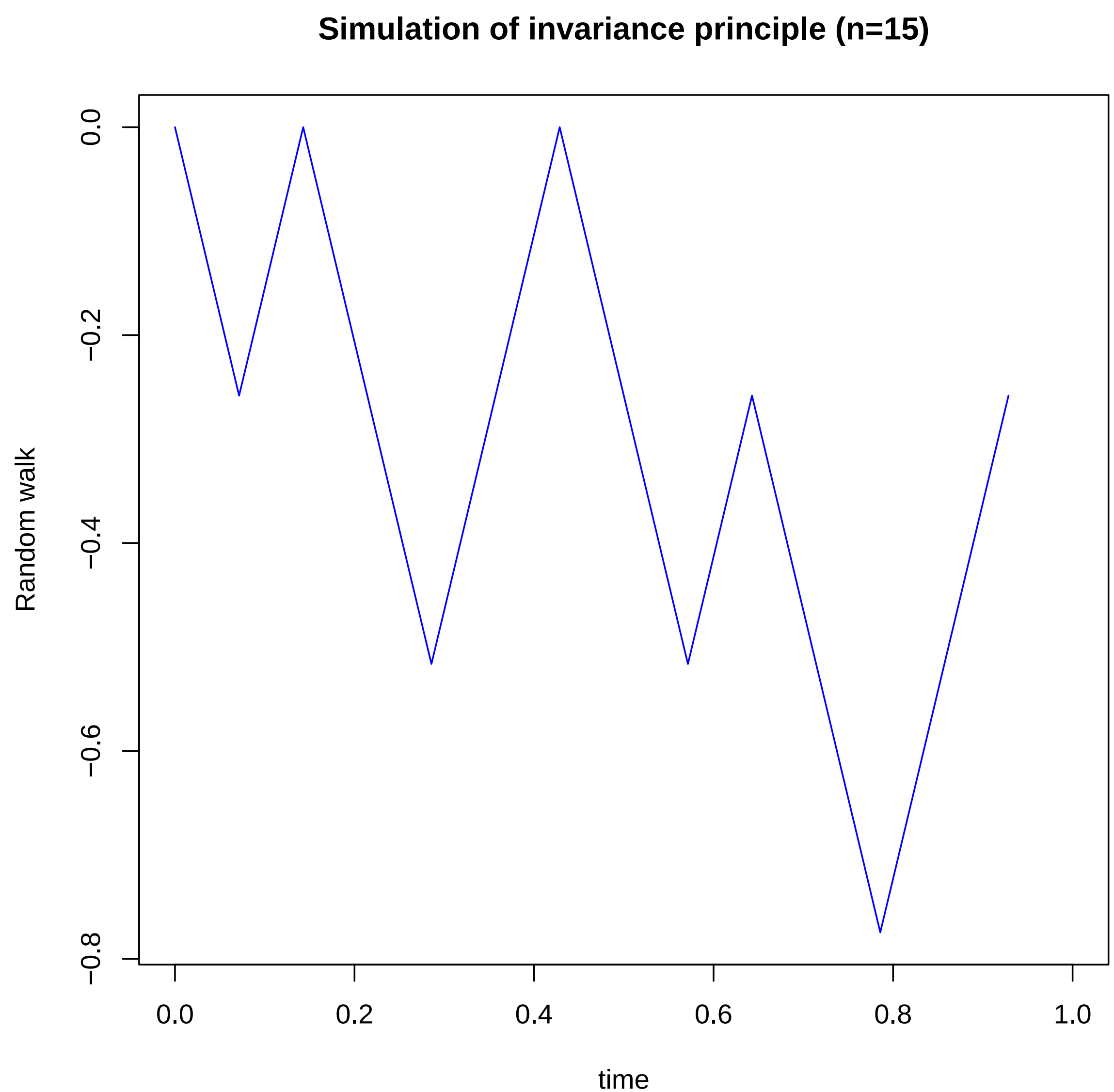
構成の方法はいろいろと知られているが，ここでは直感的に分かりやすいランダムウォークのある種の極限としてBrown運動が現れることを見よう．

以前に定義したランダム・ウォーク S_n を，次のような $[0,1]$ 上の連続時間確率過程 $B^{(n)} = \{B^{(n)}_t\}_{t\geq 0}$ に拡張して見る：各 $k, n \in N, k \leq n$ に対して，$t = 0, k/n$ での値を

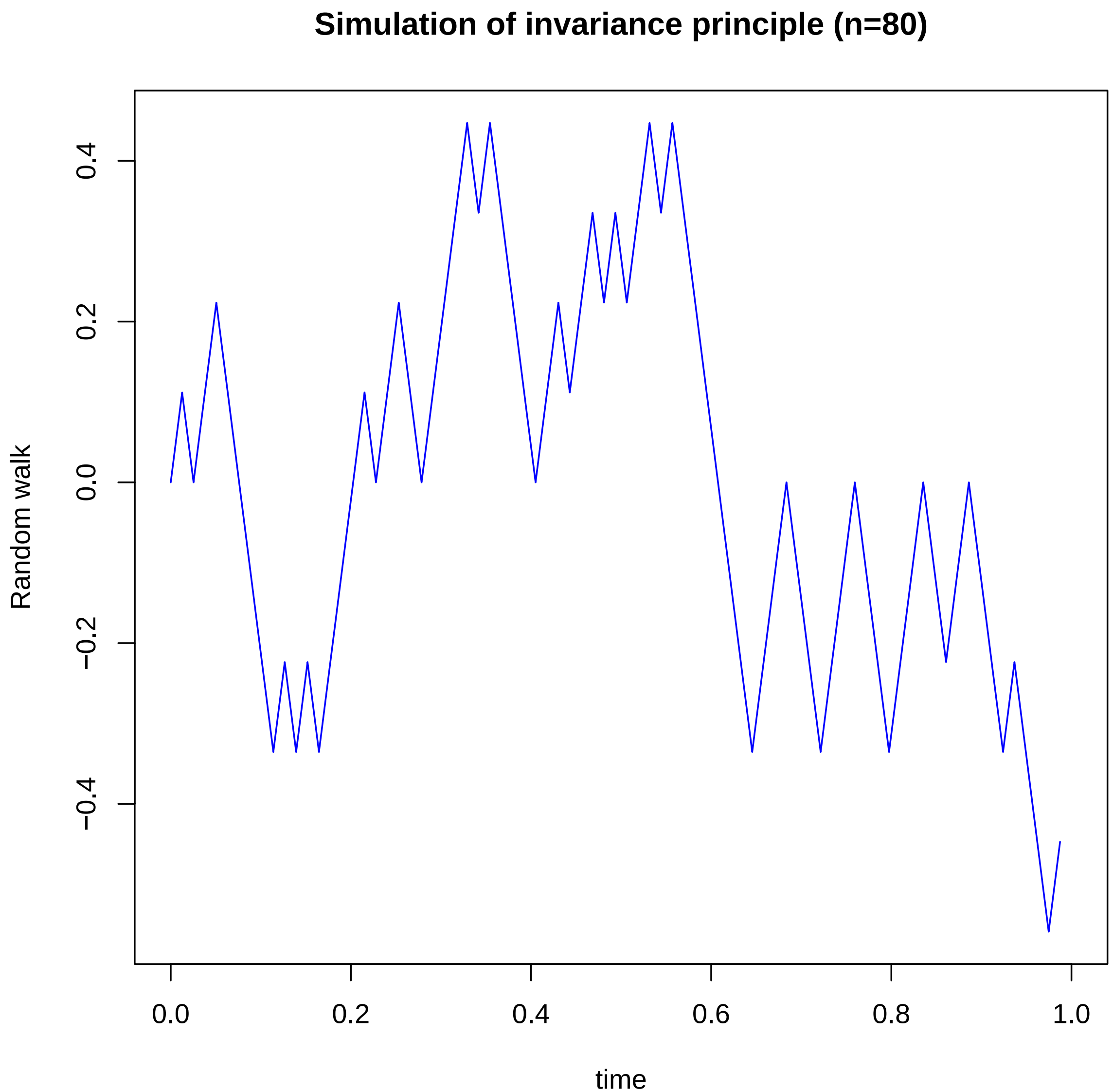
$$B^{(n)}_0 = x, \quad B^{(n)}_{k/n} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_k$$

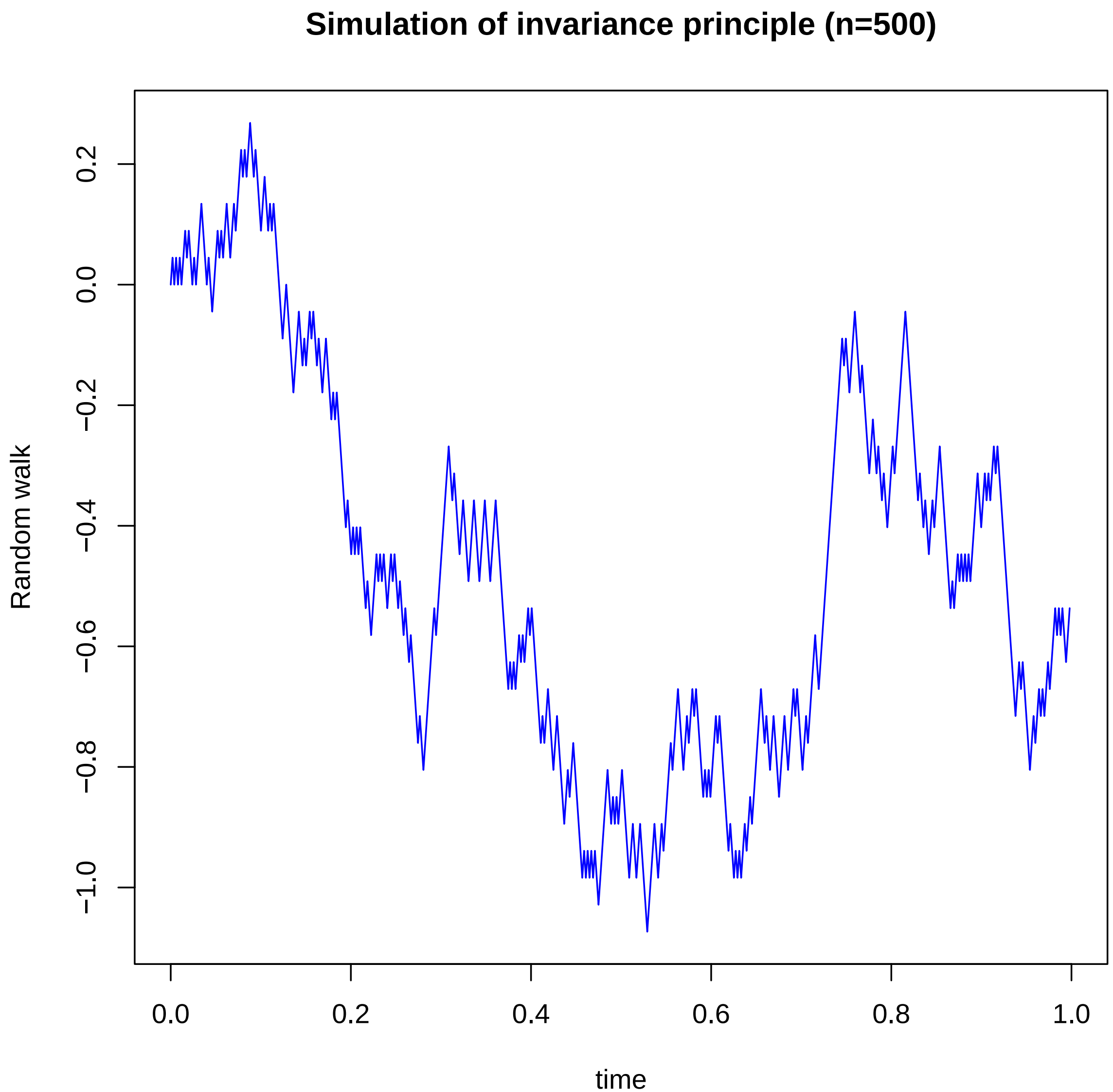
で定め，その他の $t \in [0,1]$ については，区分的に直線でつなぐ.

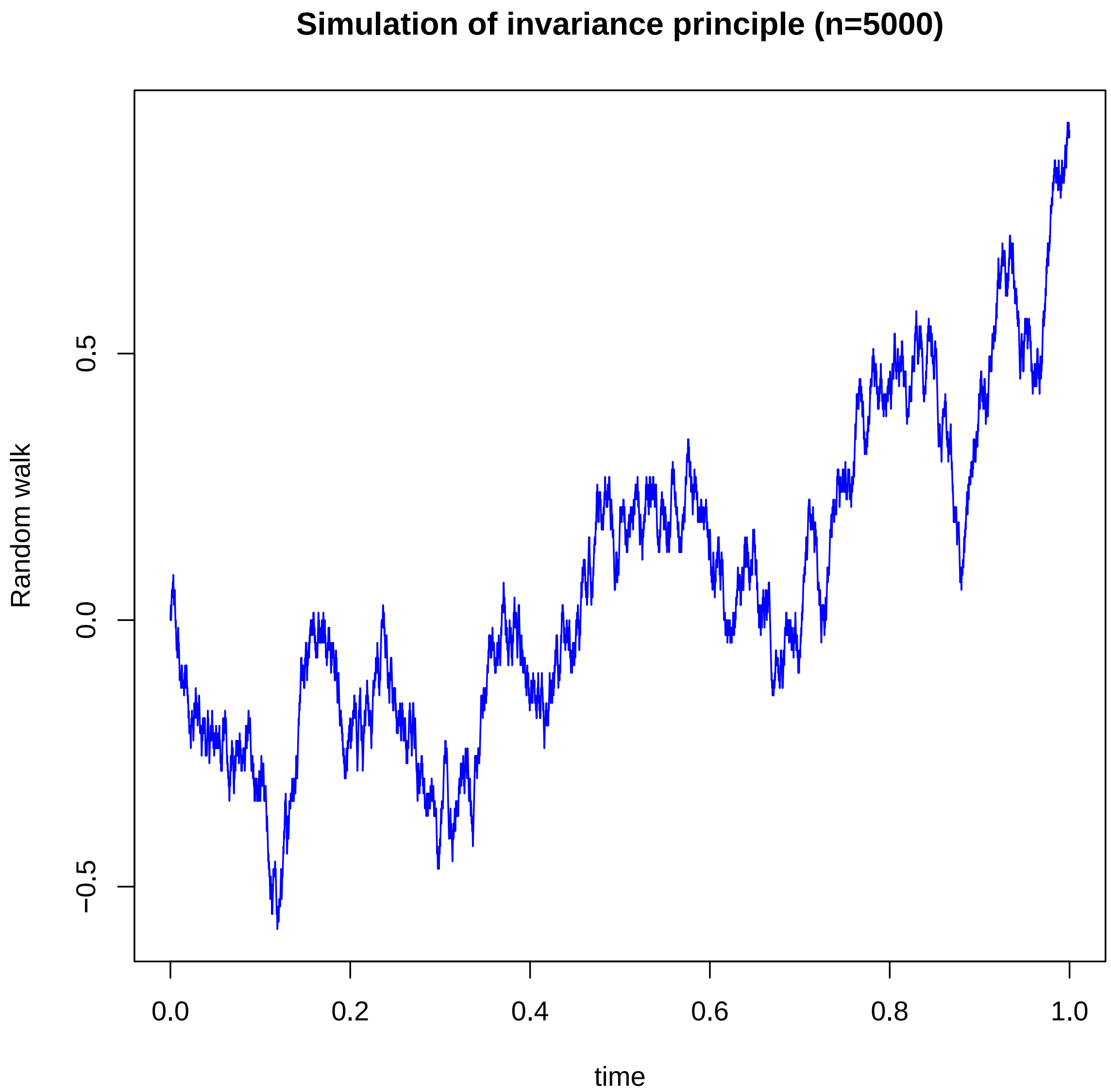
こうして出来た $B^{(n)}$ のパスを，n の値を変えてシミュレーションしてみよう ($x = 0$ とする).



Simulation of invariance principle (n=15)
Random walk
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
time


Simulation of invariance principle (n=80)
Random walk
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
time


Simulation of invariance principle (n=500)
Random walk
time
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Simulation of invariance principle (n=5000)
Random walk
−0.5
0.0
0.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
time

理論的には次の定理が成り立ち，これは**Donskerの不変原理**といわれている．

定理 3 (Donsker) 上で構成した連続時間型確率過程$B^{(n)}$において，X_iを一般に，平均0，分散1であるような実数値IID列とする．このとき，$B^{(n)}$の確率法則は，初期分布δ_xをもつWiener測度に弱収束する：

$$B^{(n)} \xrightarrow{d} B.$$

ただし，Bは$[0,1]$上のWiener過程である．

演習 13 弱収束の定義を述べ，上の定理の意味を説明せよ．

演習 14 任意の$t \in [0,1]$に対して，$B_t \sim N(0,t)$となることを示せ．

演習 15 この定理は，しばしば，**関数型中心極限定理(functional CLT)**とも言われる．その理由を推測して見よ．

こうして，$[0,1]$上のBrown運動が具体的に構成できることが分かった．

第20講：Brown運動の定義再考

Brown運動の作り方から，次の性質は容易に推察できるであろう．証明は以下の演習問題にまわす.

定理 4 (i)　Brown運動は独立増分をもつ．すなわち，$0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して，B_{t_1}，$B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots$，$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立である.

(ii)　実数 $0 < s < t$ に対して $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

実は，この定理をBrown運動の定義とすることが出来る．したがって，その厳密な数学的定義はもう忘れてしまっても良い．これからは，上の定理をBrown運動の定義と捉え，直感的な議論をしていく事にしよう.

Brown運動のいくつかの性質は，上の定理の証明と合わせて次の講に演習問題としてまとめておく.

第21講：Brown運動の性質

演習 16 $\displaystyle\int_A \phi(t-s,x,y)\,dy = P(B_t \in A|B_s = x)$ となることを示せ．したがって，$\phi(t,x,y)$ はブラウン運動が点 x から t 時間で y へ行くという推移確率密度と見ることが出来る．

(復習)：実数値確率変数 X, Y に対して，

$$P(X \in A,\ Y \in B) = \int_B f_A(x)\, P^Y(dx)$$

を満たす (可測) 関数 $f_A(x)$ のことを，X の $Y = x$ による条件付確率といい，$P(X \in A|Y = x)$ と書く．※このように，一般的な条件付確率の定義では，それが積分して１になることを問うていない．そのような条件を満たすものを，特に**正則条件付確率**と呼ぶことがある．通常はこの正則条件付確率を考える．

演習 17 定理４の性質 (i),(ii) を示せ.

演習 18 性質 (i) を用いて，$[0,1]$ 上の Brown 運動から $[0,T]$ 上の Brown 運動を作れ.

演習 19 $\displaystyle E|B_t - B_s|^{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}(t-s)^n$ となることを示せ.

演習 20 Brown 運動の推移確率密度 $\phi(t,x,y)$ が次の関係式を満たすことを示せ.

$$\phi(t+s,x,y) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t,x,z)\phi(s,z,y)\,dz.$$

これを，**Chapman-Kolmogorovの等式**という．※Bachlrierは，株価の推移確率にこの関係を仮定して議論を始めた.

演習 21 次の関係式,

$$p(t,x,y)\,dy = p(ct,\sqrt{c}x,\sqrt{c}y)\,\sqrt{c}dy$$

を示し，これを用いてWienre測度の有限次元分布を計算する事により，$B_{ct}/\sqrt{c}$，$t^{-1}B_t$ が，再びBrown 運動になることを示せ.

演習 22 確率過程論における重要な定理の一つに次の**Kolmogorovの連続変形定理**がある；

定理 5 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が，任意の $T>0$ とある定数 $\alpha,\beta,c>0$ に対して,

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq c(t-s)^{1+\beta} \qquad (0\leq s\leq t\leq T)$$

を満たせば，X として連続な確率過程を構成できる.

この定理を用いて，Brown 運動が連続なパスを持つことを示せ.

演習 23 区間 $[0,T]$ の分割 $\Delta := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ に対して，

$$V_\Delta^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^p \tag{9}$$

とおく．全ての分割について sup を取ったものを $\boldsymbol{p}$**-次変分**という．これに対し，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} E|V_\Delta^{(2)} - t|^2 = 0, \qquad |\Delta| := \max_{1\le i\le n} |t_i - t_{i-1}|, \tag{10}$$

となることを示せ.

演習 24 不等式

$$V_\Delta^{(2)} \le \max_{1\le i\le n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| \cdot V_\Delta^{(1)}$$

を示し，ほとんど確実に $\sup_\Delta V_\Delta^{(1)} = \infty$ であることを示せ．すなわち，Brown 運動は**有界変動ではない！**

演習 25 Brown 運動のパスは，連続であるが，**殆ど至るところ微分不可能**であることが知られている．興味があれば，これを文献等で調べて見よ．また，そのほかの連続関数で殆ど至るところ微分不可能なものの例を調べよ.

第22講：情報としてのσ-加法族

時間発展する確率過程X_tを扱うには，"Xによって生成される情報" という概念を定義することが重要である．それが，**フィルトレーション(filtration)** という概念である．

これ以降の話は，直感に頼って進めたほうが理解しやすいかもしれない．また，実際的な応用のためには，そのような理解の仕方で十分間に合う．詳細な議論に興味のある方は，参考文献を参照されたい．

定義 15 記号 $\mathscr{F}_t^X$ によって，時間 $[0, t]$ の間に確率過程 X を観測することで得られる情報を表わし，これらの増大列 $\{\mathscr{F}_t^X\}_{t\geq 0}$ を**フィルトレーション**と呼ぶ．$\mathscr{F}_t^X$ は，$[0, t]$ の間に，過程 X に起こる出来事全体を表わす情報である．

※ $\mathscr{F}_t^X$ は $\mathscr{F}^C$ の部分 σ-加法族であり，$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$ と書くことが多い．これは，任意の $s \in [0, t]$ に対して，X_s を可測にするような，最小の σ-加法族を表している．

定義 16 パス $\{X_s ; 0 \leq s \leq t\}$ が観測された時，ある与えられた事象 B が起こったか起こらなかったかを，そのパスの情報から確定できる時，$B \in \mathscr{F}_t^X$ と表わす．また，ある確率変数 Z の値が，観測されたパス $\{X_s ; 0 \leq s \leq t\}$ によって完全に決定される時，$Z \in \mathscr{F}_t^X$ と表わし，**”Z は $\mathscr{F}_t^X$-可測である”** という．さらに，全ての $t \geq 0$ に対して，$X_t \in \mathscr{F}_t^X$ であるとき，確率過程 X はフィルトレーション $\mathscr{F}_t^X$ に**適合的 (adapted)**，または，$\mathscr{F}_t^X$-**適合**であるという．

Ex. 3 事象Aを$A := \{\omega \in C\,;\ X_t \leq 3.14,\ \forall t \in [0,5]\}$と定義すると，これは$A \in \mathscr{F}_5^X$である．

なぜなら，時間間隔$[0,5]$のXのパスを観測することでAが起こったかどうかを決定できるからである．しかしながら，$A \notin \mathscr{F}_4^X$であることに注意せよ．

Ex. 4 確率変数Zを，$\omega \in C$を固定するごとに$Z = \int_0^5 X_t\,dt$で定める．このとき，$Z \in F_5^X$である．

なぜなら，Xの$[0,5]$でのパスを観測できれば，$[0,5]$上での連続関数X_tが決まり，その積分値Zが決定されるからである．

演習 26 次のことを判定せよ.
(1) 事象 $A := \{X_3 < 3.14$ または，$X_6 \leq 3.14\}$ に対して，$A \in \mathscr{F}_3^X$ であるといえるか.
(2) 事象 $A := \{X_5 < 1\}$ は，ある小さな $\epsilon > 0$ に対して，$A \in \mathscr{F}_{5-\epsilon}^X$ となりえるだろうか.

演習 27 次の確率過程 Z は，$\mathscr{F}_t^X$-適合と言えるか？
(1) $Y_t := \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$.

(2) $Y_t := \inf_{0 \leq s \leq t+\epsilon} X_s$. ただし，$\epsilon > 0$.

(3) $Y_t := \int_0^t f(X_s)\, ds$. ただし，$f$ は有界関数とする.

演習 28 確率変数 τ，η を，ある $T > 0$ に対して以下で定義する：

$$
\begin{aligned}
\tau &:= \inf\{s \in [0, T)\,;\, X_s < 0\}, \\
\eta &:= \sup\{s \in [0, T)\,;\, X_s < 0\}.
\end{aligned}
$$

このとき，$A = \{\tau \leq t\}$，および，$B = \{\eta \leq t\}$ は，それぞれ $\mathscr{F}_t^X$-可測になるか. また，可測になるとすれば，それはどんな時か.

※任意の $t \geq 0$ に対して $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t^X$ となるとき，τ は X に関する**停止時刻 (stopping time)** であるという.

第23講：拡散過程

今日の確率論は，数理ファイナンスとともに発展していると言っても過言ではない.

ファイナンスにおける資産価格のモデリングには，連続時間型確率過程が使われる.
そこでは，**確率微分方程式 (Stochastic differenctial equations: SDE)** を道具として使う事により，非常にエレガントな理論が構築される.

今回は特に，**拡散過程 (Diffusion processes)** といわれる確率過程に焦点を当てよう.

Q．拡散過程とは何か？

大雑把には，その局所的な挙動が，次の確率**差分**方程式によって記述できる確率過程である．

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)\Delta B_t \tag{11}$$

ここで，B はBrown運動であり，$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t$．また，$\mu, \sigma$ はそれぞれ，$\mathbf{R}^2$ 上の非確率的な関数である．

これは，X_t から $X_{t+\Delta t}$ への局所的な推移確率は，正規分布

$$N\Big(\ X_t + \mu(t, X_t)\Delta t\ ,\ \sigma^2(t, X_t)\Delta t\ \Big)$$

によって与えられるということを意味している．

拡散過程とは，この X_t の，ある意味での極限として現れる連続時間型確率過程であり，上の差分方程式を**"精密化"**して得られる方程式の解である．

第24講：確率微分方程式

先の確率差分方程式

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)\Delta B_t$$

を**"精密化"**する試みとして，通常の微分の概念と同様に両辺をΔtで割り，パスごとに(P-$a.s.$で)$\Delta t \to 0$を考えることは自然だろう．すると形式的に

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\frac{dB_t}{dt} \quad P\text{-}a.s.$$

となる．ところが，Brown運動Bは至るところ微分不可能であった！(演習25をみよ) したがって，$\dfrac{dB_t}{dt}$を通常の微分のように定義することができないのである．

微分が駄目なら，積分を考えて精密化を試みてはどうだろうか？例えば，区間 $[0,t]$ を n 等分して $\Delta t = t/n$ とし，

$$X_t := X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mu\left(\frac{i}{n}t, X_{\frac{i}{n}t}\right) \cdot \frac{i}{n}t + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma\left(\frac{i}{n}t, X_{\frac{i}{n}t}\right) \cdot \Delta B_{\frac{i}{n}t}.$$

これを用いて，概収束極限 $\lim_{n\to\infty} X_t(\omega)$ で拡散過程を定義してはどうだろう？

もし，この極限が存在すれば，Riemann 積分を定義した時と同様に，次のような積分方程式が得られそうな気がするだろう：

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s \quad P\text{-}a.s. \tag{12}$$

ところが，これも**定義できない！** なぜなら，B のパスは局所的に無限変動であり (演習 24 をみよ)，最後の項の極限は存在しないのである！

このような不具合は，B のパスごとに (P-$a.s.$ の意味で) X_t の**”極限”**を定義しようとすることで起こっている．しかし，その”極限”の意味を少し緩めると，方程式 (12) の dB_t-積分

$$\int_0^t g(s)\,dB_s \tag{13}$$

を上手く定義することが出来る．このような新しい積分は**確率 (伊藤) 積分**と言われ，**伊藤解析**と言われる強力な確率微分法をもたらす.

伊藤積分が定義されれば，方程式 (12) は意味を持つ．この積分方程式を簡略化し，

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t, \tag{14}$$

と書いて，これを**確率微分方程式**と言っている.

第25講：確率積分 (伊藤積分)

確率過程 $\{g_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ を**単関数**とする (n は固定)．すなわち，非確率的な分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ に対して，

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g_n(t_{i-1})\mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i)}(t)$$

とする．

定義 17 この単関数に関して，

$$\int_0^T g_n(t)\,dB_t := \sum_{i=1}^{n} g_n(t_{i-1})\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \tag{15}$$

は P-$a.s.$ に定まる．これを単関数 g_n に対する**確率積分**として定義する．

先に述べたように，(15)はP-$a.s.$には収束しないが，次の２つの事実によって，一般の確率過程gに対する確率積分を定義できる．

定理 6 確率過程$g=\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$に対して，ある単関数列g_nが存在して，

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T |g_n(t)-g(t)|^2\,dt\right]=0. \tag{16}$$

定理 7 (16)を満たすg_nに対して，ある確率変数Z_Tが存在して，

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\int_0^T g_n(t)\,dB_t - Z_T\right|^2 = 0. \tag{17}$$

定義 18 $Z_T=\displaystyle\int_0^T g(s)\,dB_s$と表わし，これを$g$の$B$による**確率積分**という．すなわち，単関数列の確率積分の$\boldsymbol{L^2}$**-極限**として，一般の確率積分が定義される．

演習 29 単関数 g に対して次のことを示せ.

(1) $E\left[\int_0^T g(t)\,dB_t\right] = 0.$

(2) $E\left[\left(\int_0^T g(t)\,dB_t\right)^2\right] = \int_0^T E\left[g^2(t)\right]\,dt.$

(3) $\int_0^T g(t)\,dB_t$ は $\mathscr{F}_t^B$-可測である.

これは，前述の極限操作によって，一般の g に対しても成り立つことが示される.
確率積分の最も重要な性質である.

第26講：マルチンゲール

現代の確率解析はほとんど，今から述べる**マルチンゲール**から始まっていると言ってよい．Brown運動や確率積分もマルチンゲール性を持っている．これについて，演習と共に触れておこう．

確率空間にあるフィルトレーションが与えられた$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{T}}, P)$のことを**フィルター付き確率空間**という．すでに述べたように，$\mathscr{F}_t$は，時点tまでに観測された全ての事象によって生成された情報と見てよい．(インデックス$\mathscr{T}$は$\mathbf{R}_+$や$\mathbf{N}$などがくる)

定義 19 (条件付期待値) 任意の確率変数Xに対して，記号

$$E[X|\mathscr{F}_t] \tag{18}$$

によって，時点tまでの事象を観測したときのXの期待値を表わす．

条件付期待値をきちんと定義するには再び測度論の議論になるので，今回はこんなもので満足しよう．

次の定理は直感的に理解されるだろう：

定理 8 X, Y は確率変数で，Y は $\mathscr{F}_t$-可測であるとする．このとき，
(1) 条件付期待値 $E[X|\mathscr{F}_t]$ は，$\mathscr{F}_t$-可測な確率変数である．

(2) $E[X \cdot Y|\mathscr{F}_t] = Y \cdot E[X|\mathscr{F}_t]$.

(3) $s < t$ ならば，$E\Big[E[X|\mathscr{F}_t]\Big|\mathscr{F}_s\Big] = E[X|\mathscr{F}_s]$.

(4) $E\Big[E[X|\mathscr{F}_t]\Big] = E[X]$.

(5) X が $\mathscr{F}_t$ と独立ならば，$E[X|\mathscr{F}_t] = E[X]$.

演習 30 上の定理を，今まで行なってきたような" 直感的な" 方法で説明せよ．

定義 20 (martingale) 確率過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ が次の条件を満たすとき，X は $\mathscr{F}_t$-martingale といわれる．

(1) X は $\mathscr{F}_t$-adapted である．

(2) 任意の $t \in \mathscr{T}$ に対して，$E[|X_t|] < \infty$.

(3) 任意の $s \leq t$ に対して，$E[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s$

(1) は，時点 t において X_t が観測できるということである．(2) は単なる技術的な条件．(3) が本質的で，もし今日までの情報が与えらたとして，明日の X の期待値を計算すると，今日観測された値に等しいということである．(これが martingale が" 公平な賭け" といわれる所以である．)

演習 31 定理８を用いて，Brown 運動 $\{B_t\}$ が $\mathscr{F}_t^B$-martingale であることを示せ.

演習 32 定理８を用いて，$\{B_t^2 - t\}$ が $\mathscr{F}_t^B$-martingale であることを示せ.

演習 33 定理８を用いて，任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し，$\left\{\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right\}$ が $\mathscr{F}_t^B$-martingale であることを示せ.

演習 34 $g = \{g(t)\}_{t \geq 0}$ を前述の単関数とするとき，確率積分 $\int_0^t g(s)\,dB_s$ は $\mathscr{F}_t^B$-martingale になることを次の順序で示せ.

(1) 任意の $s < t$ に対して，$\displaystyle\int_0^t g(u)\,dB_u = \int_0^s g(u)\,dB_u + \int_s^t g(u)\,dB_u$ と分解せよ.

(2) $\displaystyle E\left[\int_0^s g(u)\,dB_u \middle| \mathscr{F}_s^B\right] = \int_0^s g(u)\,dB_u$ を示せ.（**Hint:** 演習 29 (3) に注意)

(3) $\displaystyle E\left[\int_s^t g(u)\,dB_u \middle| \mathscr{F}_s^B\right] = 0$ を示せ.（**Hint:** 定理８の (3), (5) を用いよ)

(4) マルチンゲールの主張を結論付けよ.

第27講：伊藤の公式

伊藤の公式は，確率解析の世界に革命をもたらし，数理ファイナンスを飛躍的に発展させた．ブラック・ショールズモデルがノーベル経済学賞を取った時，Scholes 氏は「賞は伊藤こそがもらうべきだ！」と言ったという．日本の誇りともいうべき伊藤の公式を紹介する．

伊藤の公式は, "確率微分の連鎖率" とも言うべきもので, "微分積分学の基本定理" と言われる次の公式の確率論バージョンである：$\varphi \in C^1(\mathbf{R}_+)$，$f \in C^1(\mathbf{R})$ に対して,

$$
\begin{aligned}
f(\varphi(t)) &= f(\varphi(0)) + \int_0^t f'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \\
&= f(\varphi(0)) + \int_0^t f'(\varphi(s))\,d\varphi'(s).
\end{aligned}
$$

Brown 運動 B に対する伊藤の公式を書き下すと，以下のようになる：

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds \quad (19)$$

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi(0)) + \int_0^t f'(\varphi(s))\,d\varphi'(s)$$

通常と異なる第３項が，確率論に特徴的な量である B の２次変分に由来する (演習 23 参照)．このことは，以下の演習によって確認すること．

演習 35 (1) 実数列 a_n, b_n に対して，$\Delta a_{i-1} = a_i - a_{i-1}$ などとおくとき，以下を示せ：

$$a_n b_n - a_0 b_0 = \sum_{i=1}^n a_{i-1}\Delta b_{i-1} + \sum_{i=1}^n b_{i-1}\Delta a_{i-1} + \sum_{i=1}^n \Delta a_{i-1}\Delta b_{i-1}.$$

(2) Brown 運動 B に対して，次を示せ：

$$B_t^2 = B_0^2 + 2\sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}}\Delta B_{t_{i-1}} + \sum_{i=1}^n (\Delta B_{t_{i-1}})^2\,.$$

(3) (2) の式より，$f(x) = x^2$ の場合の伊藤の公式 (19) を証明せよ．

一般には，次の**伊藤の公式**が成り立つ．

定理 9 (伊藤の公式) X が確率微分方程式

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t$$

に従う時，$f \in C^2(\mathbf{R})$(と，適当な可積分条件)の下で，

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s)\,dX_s + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s)\,ds \qquad (20) \\ &= f(X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} f(X_s) + \mathscr{A}_s f(X_s)\right] ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s)\,dB_s \qquad (21) \end{aligned}$$

ここに，$\mathscr{A}_t = \mu(t, x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \sigma^2(t, x)\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ である．

※この $\mathscr{A}_t$ は**生成作要素**と言われ，マルコフ過程論において非常に重要な微分作要素である．

演習 36 式(20)から式(21)が導かれることを確認せよ．また，上の公式を用いて，式(19)が導かれることを確認せよ．

第28講：数理ファイナンスへの応用

ここからは，確率微分方程式の代表的な応用例として数理ファイナンスで有名なBlack-Scholes方程式を導いて見よう.

数理ファイナンスでは，株式の価格を，次の確率微分方程式でモデリングするのが一般的であった：

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t, \qquad S_0 = s \tag{22}$$

ただし，μ，σ は定数である．これを**Black-Scholes Model**と呼んでいる.

数理ファイナンスでの最も重要な問題は，この株式 S の上に書かれた**オプション (options)** と言われる**金融派生商品 (デリバティブ)** の価格を，数理的に妥当な方法によって価格付けすることである.

オプションには**コール**と**プット**と言われる２種類がある.

プット・オプション： 特定の証券を，設定された時点Tにおいて，**権利行使価格**と言われる価格K円で**売る**権利.

コール・オプション： 特定の証券を，設定された時点Tにおいて，**権利行使価格**と言われる価格K円で**買う**権利.

その中でも，満期Tが固定されているものを**ヨーロッパ型**，任意の時点Tで行使できるものを**アメリカ型**と呼んでいる.

※Black-Scholseモデルでは，特に**ヨーロッパ型・コール・オプション**の価格付けが論じられる.

◆ヨーロッパ型のオプションの満期における価値

プット・オプション： 満期時の価格 S_T と行使価格 K によって決まり，$\Psi_K(S_T)$ と書ける．ただし，$\Psi_K(x) = \max\{K - x, 0\}$.

コール・オプション： 満期時の価格 S_T と行使価格 K によって決まり，$\Phi_K(S_T)$ と書ける．ただし，$\Phi_K(x) = \max\{x - K, 0\}$.

第29講：Black-Scholes 方程式

重要な仮定：コール・オプションの時点での価値は，対象となる証券の時点tでの価格S_tによって決定される．すなわち，オプション価格C_tは，t，S_tの関数である:

$$\boldsymbol{C_t = f(t, S_t), \quad C_T = \Phi_K(S_T).} \tag{23}$$

すると，伊藤の公式によって，

$$dC_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right) dt + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \sigma S_t \, dB_t \tag{24}$$

演習 37 **伊藤の公式**をC_tに適用し，上の式(24)を導け.

今，このコール・オプションと，原株u枚を保有するというポートフォリオを考えると，その価値は$I_t = C_t + uS_t$となる．したがって，(以降は少しごまかしている)

$$\begin{aligned} dI_t &= dC_t + u\,dS_t \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \left(u + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right) dt + \left(u + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\sigma S_t\, dB_t \end{aligned}$$

ここで，$u = -\frac{\partial}{\partial s} f(t, S_t)$となるように常時ポートフォリオを組み替えていけば，常に確定的な(**無リスク**の)収益dI_tを得ることがでて，

$$dI_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right) dt$$

ところが，I_tが無リスクならば，その収益は銀行の預金金利rと等しくなければ不条理である！：$\Rightarrow \boldsymbol{dI_t = rI_t\, dt} = r\left(C_t - S_t \frac{\partial f}{\partial s}\right) dt$

したがって，次の方程式を得ることができた：

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t)+rS_t\frac{\partial f}{\partial s}(t,S_t)+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,S_t)-rf(t,S_t)=0 \tag{25}$$

つまり，コール・オプションの価格を求めたければ，次の偏微分方程式の境界値問題を解いて f を求めればよい：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}+rs\cdot\dfrac{\partial f}{\partial s}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 s\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}-rf=0, \\ \\ f(T,s)=\Phi_K(s). \end{cases} \tag{26}$$

ただし，$\Phi_K(s)=\max\{s-K,0\}$ である．

これが，世に言う**Black-Scholesの方程式**である．

第30講：確率過程と偏微分方程式

Black-Scholesの方程式のような2階偏微分方程式を解析的に解くのは，一般には不可能である．しかし，確率過程を用いて，その解を構成できることが知られている．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + rs \cdot \dfrac{\partial f}{\partial s} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 s \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2} - rf = 0, \\ f(T, s) = \Phi_K(s). \end{cases} \tag{27}$$

を，よく眺めて見よう．

この偏微分方程式は，拡散過程

$$dX_t = rX_t\,dt + \sigma X_t\,dB_t$$

の生成作要素 $\mathscr{A}_t = rx \cdot \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ を用いて,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathscr{A}_t\right) f(t,x) - rf(t,x) = 0, \\ \\ f(T,x) = \Phi_K(x). \end{cases} \tag{28}$$

と書くことが出来る事に気付く.

定理 10 (Feynman-Kacの解) この境界値問題(28)の解は,

$$f(t,x) = e^{-r(T-t)} E\left[\Phi_K(X_T) | X_0 = x\right] \tag{29}$$

で与えられる.

つまり，時刻tにおけるオプション価格$C_t = f(t, S_t)$は，形式的に次のように考えて求めることが出来る：

(1) 株価過程Sのドリフト項(dt-積分の係数)の定数μを，預金金利rに変換した確率過程Xを考えて，それが株価のモデルであるとみなす.

(2) そのXの時点tにおける値をS_tとおいて，$T-t$時間後のXの条件付期待値を計算する.

(3) その期待値に**割引率**$e^{-r(T-t)}$を掛けて，現在の価値に換算する.

このあたりの数学的理論は非常に深遠で美しい．また実務的には統計的な問題も多い.

参考のために（もしかしたら，時々有用かもしれない），Feynman-Kacの公式を，今回の確率微分方程式の枠組みで，出来るだけ一般に述べておこう．

定理 11 F は，境界値問題

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathscr{A}_t\right) F(t,x) - r(t,x)F(t,x) = 0, \\ F(T,x) = \Phi(x). \end{cases} \tag{30}$$

の解であるとせよ．ただし，$\mathscr{A}_t = \mu(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ とする．このとき，解 F は次の表現をもつ：

$$F(t,x) = E\left[e^{\int_t^T r(s,X_s)\,ds} \Phi(X_T) \middle| X_t = x \right]. \tag{31}$$

ただし，確率過程 X は，$dX_t = \mu(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dB_t$ に従う拡散過程である．

演習 38 次の偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \\ \\ F(T, x) = x^2. \end{cases} \tag{32}$$

を，次の手順で解け.

(1) Feynman-Kacの公式(定理10)を適用するためには，確率過程 X が従う確率微分方程式としてどのようなものを考えればよいか.

(2) $X_T \sim N\left(x, \sigma\sqrt{T-t}\right)$ となることを示せ.

(3) 解は $F(t, x) = \sigma^2(T-t) + x^2$ となることを示せ.

参考文献：主に教科書について，思いつくままに...

確率過程の基本事項について，定評のある教科書で避けて通れない書物は **[1]Billingsley** ('68) "Convergence of probability measures" であろう．今回学んだような C-space への拡張が丁寧に書かれており，文句無しの名著である．今回の確率空間の話でも参考にした．幅広い話題について，**[2]Durrett** ('95) "Probability:..." はよい．応用中心なら **[3]Karlin** ('71) "A first course..." か，その日本語訳" 確率過程講義" (産業図書) が有名か?私は読んだ事はない．日本語なら **[4] 伊藤清** ('78) " 確率論" や **[5]Feller** ('68) "An introduction..." が名著．いきなり連続時間をやりたいなら，有名なものは **[6]Karatzas and Shreve** ('91) "Brownian motion..." で，最近日本語訳まで出た (Springer 東京)．彼らはファイナンスの大家でもある．ちなみに私は，多くをこの本と **[7] 長井英生** ('99) " 確率微分方程式" で学んだ．**[8]Durret** ('84) "Brownian motion and martingale" も参考になる．もっと発展的に学ぶなら **[9]Protter** ('90) "Stochastic differential..." がある (私の修士１年時のセミナー本)．SDE を学ぶなら，初めから応用目的で始めてもよい．**[10]Lamberton and Lapeyer** ('96) "An intoroduction..." は，何も知らなくても (測度論は必須)，martingale から SDE，ファイナンスへの応用を学べる優れた教科書で

最もお勧めである (私の４年時のセミナー本). これも最近になって日本語訳" ファイナンスへの確率解析" (朝倉) が出ている. また, **[11]Øksendal** ('03) "Stochastic Differential..." はマルコフ過程と偏微分方程式, 確率制御, フィルタリングなどの応用についても詳しく, 面白い. 日本語訳がある.

さて, 今回触れられなかった確率過程の統計推測に関しても少し挙げておこう. **[12]Ibragimov and Has'minskii** ('81) "Statistical Estimation" が超有名. **[13]Basawa and Rao** ('80) "Statistical Inference..." はカタログのような本だが, いろいろ載っている. 最近では **[14]Taniguchi and Kakizawa** ('00) "Asymptotic..." というすごい本がある. 拡散過程関連では, 尤度について **[15]Liptser and Shiryayev** ('77-) のシリーズ本がある. **[16]Kutoyannts** ('84) "Parameter estimation..." を筆頭に, **[17]Prakasa Rao** が山のように書いているので MathSciNet で調べられたし. 彼は, 人の仕事をすぐに吸収し, 自分の本として出版してしまうようだ... そのエネルギーに恐れ入るだろう. **ジャンプ型確率微分方程式の統計に興味のある方は, [18] 清水泰隆 "Asymptotic inference...:博士論文" ('06 in preparation) がよい**.

おわり