金融工学入門用語まとめ

§第 2 章　基本的な金利理論

・元本 principle

・利息 interest

・単利 simple interest

・複利 compound interest

・幾何的増大 geometric growth

・7-10 ルール seven-ten rule 年 7 %で投資された資金は約 10 年で 2 倍になる．また，年利 10 %で投資された資金は約 7 年で 2 倍になる．一般に金利が 20 %以下なら，2 倍になるのに 72/i（i は金利（%））年かかる．

・実行利率 effective interest rate

・名目利率 nominal rate

・連続複利 continuous rate e^r (r=nominal rate)

・指数増加 exponential growth

・現在価値 present value

・割引 discounting

・割引係数 discount factor d=1/(1+r) (r=rate)

・理想銀行 ideal bank 預金と貸し付けに同じ金利を適用し，サービス料及び取引手数料をとらない．金利はどのような元本の大きさに対しても同じく適用される．さらに，個々の取引の将来の収支への影響は完全加法的である．ただし全ての取引の金利が同じであることを意味するものではない．理想銀行の金利が，適用される時間の長さに関わらず一定で，その金利が通常のルールの複利ならば，金利一定の銀行 (constant ideal bank) とよばれる．

・将来価値 future value (cf. present value)

・現在価値を求める連続複利の公式 PV=$\sum_{k=0}^{n} x(t_k)e^{-rt_k}$

・等価流列 equivalent streams 理想銀行が $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ の流列を $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$ に変更することができるならば，その反対の変換も可能である．互いに 2 つ流列は等価流列と呼ばれる．

・内部収益率 internal rate of return (IRR) $PV = \sum_{k=0}^{n} x_k/(1+r)^k = 0$ を満たす r を内部収益率とよぶ．

・正味現在価値 net present value

・利益の現在価値 present worth of benefits

・費用の現在価値 present worth of costs

・資本コスト cost of capital この数値は，企業がその企業の潜在的な投資家に提供しなければならないコストのこと．また場合によっては，いくつかの望ましいプロジェクトに期待される収益率をとることもある．

・インフレ率 inflation rate

・恒常ドル（実質ドル） constant dollars (real dollars) 基準年のドルと同じ購買力持ち続ける（仮説上の）ドル．

・現実のドル（名目のドル） actual dollars (nominal dollars) 実際に取引で使うドル．

・実質金利 real interest rate インフレを考慮した金利 Definition: $1 + r_0 = (1 + r)/(1 + f)$ (r_0:実質金利，r:名目金利，f:インフレ率)

§第 3 章　確定利付証券

・金融商品 financial instruments 実物もしくは実物資産ではなく，紙やコンピューターのデータベースの中にあるものとしてのみ取引される．

・証券 security ある商品に対して良く発展した市場があって，自由で容易に取引されるならば，その商品は証券と呼ばれる．

・確定利付証券 fixed-income securities これは良く発展した市場で取引され，ある期間にわたって所有者に固定的な収入を約束する商品である．社債の支払いは，一部は株価によって決定されるだろう．こういった定義から明らかな確率的変動（この場合は株価の変動）を除けば，固定的なキャッシュ・フロー流列を持つ証券のことである．最も身近なのは利息を生みだす銀行預金である．

・デフォルトする default 倒産する

確定利付証券 fixed-income securities

貯蓄預金

・要求性預金 demand deposit 市場条件で変わる金利を支払うものである．

・定期性預金勘定 tune deposit account 定期預金はある期間保持しなければならず，早期の引き出しにはペナルティがかかる預金である．

・譲渡性預金 certificate of deposit (CD) 1 万ドルという標準的な額面金額で発行される．大きな額面の譲渡性預金は市場で売却することができるので証券とみなされる．

短期金融（市場）商品（money market）… 企業および銀行を含む金融仲介者による短期間（一年もしくは一年以下）の貸付市場に対してつかわれる．

・コマーシャル・ペーパー commercial paper 企業に対する無保証（つまり無担保）の貸付を表わす用語.

・銀行引受手形 banker 's acceptance 企業 A が企業 B に物を売る場合，企業 B はたとえば 3 カ月という一定の期間内に物品に対する支払いを行うという約束をする．このとき銀行は企業 B に代わって代金を支払うことを約束する．この結果企業 A は期限が来る前に銀行引受取引を割引いて，他の誰かに売却することができる.

・ユーロドル預金 Eurodollar deposit ドル額面であるが，米国以外の銀行が保有する預金である.

・ユーロドル譲渡性預金 Eurodollar CD ドル額面で，米国以外の銀行が発行する譲渡性預金である．これらのユーロドルと通常のドルとの区別は，銀行の規制と保証に関する違いによるものである.

米国債（米国政府証券）… 米国政府は，様々なタイプの確定利付証券を発行することによって，借金をしている．これらの証券は政府自身によって担保されているので，最高に信用のあるものと考えられている.

・米国 T ビル U.S. Treasury bill 一万ドル以上の額面で，13 週，26 週，52 週の固定満期で発行される．これらは割引方式で売却される．例えば一万ドルの額面の T ビルが 9,500 ドルで売却されるとすると，価格と額面価値との差が金利となる.

・米国 T ノート U.S. Treasury note 一年から十年の満期をもち，1000 ドルの額面で売られている．T ノートの保有者は満期まで 6ヵ月ごとにクーポン支払い (coupon payment) を受ける．このクーポンは金利を表わし，その大きさは債権の満期まで固定される.

Treasury notes (or T-Notes) mature in one to ten years. They have a coupon payment every six months, and are commonly issued with maturities dates between 1 to 10 years, with denominations of ＄1,000. In the basic transaction, one buys a "＄1,000" T-Note for say, ＄950, collects interest over 10 years of say, 3 % per year, which comes to ＄30 yearly, and at the end of the 10 years cashes it in for ＄1000. So, ＄950 over the course of 10 years becomes ＄1300.(Wikipedia)

・米国 T ボンド U.S. Treasury bond 10 年以上の満期で発行される．クーポン支払いがあり T ノートに似ている．しかし，いくつかの T ボンドには償還条項付き (callable) である．かつてはクーポン支払い日に財務省が債券保有者に額面価値で債券をその時点で償還させることができた.

Treasury bonds are issued by the government of the United States in order to pay for government projects. The money paid out for a Treasury bond is essentially a loan to the government. As with any loan, repayment of principal is accompanied by a fixed interest rate. These bonds are guaranteed by the 'full faith and credit' of the U.S. government, meaning that they are extremely low risk (since the government can simply print money to pay back the loan). Additionally, interest earned on Treasury bonds is exempt from state and local taxes. Federal taxes, however, are still due on the earned interest. The government sells Treasury bonds by auction in the primary market, but they can also be purchased through a broker in the secondary market. A broker will charge a fee for such a transaction, but the government charges no fee to participate in auctions. Treasury bonds are marketable securities, meaning that they can be traded after the initial purchase. Additionally, they are highly liquid because there is an active secondary market for them. Prices on the secondary market and at auction are determined by interest rates. Treasury bonds issued today are not callable, so they will continue to accrue interest until the maturity date. One possible downside to Treasury bonds is that if interest rates increase during the term of the bond, the money invested will be earning less interest than it could earn elsewhere. Accordingly, the resale value of the bond will decrease as well. Rising inflation can also eat into the interest earned on Treasury bonds. Because there is almost no risk of default by the government, the return on Treasury bonds is relatively low, and a high inflation rate can erase most of the gains by reducing the value of the principal and interest payments. Investors who wish to participate in auctions and purchase Treasury securities directly from the Federal Reserve Bank can open a Treasury Direct Account. There are no fees associated with the account unless it contains over 100,000, at which point a very small maintenance fee is incurred.(http://www.investorguide.com/igu-article-576-bonds-treasury-bonds.html)

・ストリップス国債 U.S. Treasury strips 米国政府が分離形式で発行する債券である．クーポンのそれぞれが，別々に元本として発行される．分離されると，10 年債は 20 個の半年のクーポンの証券と元本の証券からなる．これらの証券は，ゼロ・クーポン債 (zero-coupon bond) と呼ばれる．

Separate Trading of Registered Interest and Principal Securities (or STRIPS) are T-Notes, T-Bonds and TIPS whose interest and principal portions of the security have been separated, or "stripped"; these may then be sold separately (in units of 1000 face value) in the secondary market. The name derives from the days before computerization, when paper bonds were physically traded; traders would literally tear the interest coupons off of paper securities for separate resale. The government does not directly issue STRIPS; they are formed by investment banks or brokerage firms, but the government does register STRIPS in its book-entry system. They cannot be bought through TreasuryDirect, but only through a broker. STRIPS are used by the Treasury and split into individual principal and interest payments, which get resold in the form of zero-coupon bonds. Because they then pay no interest, there is not any interest to re-invest, and so there is no reinvestment risk with STRIPS.(Wikipedia)

その他の国債

・地方債 municipal bond 州や自治体によって発行される．二つの主要なタイプがある．一つは州のような自治体いよって保証される一般財源債 (general obligation bond) である．もう一つは，最初に債券発行で資金調達したプロジェクトによって生成される収入，またはプロジェクトに対する責任機関によって保証される特定財源債 (revenue bond) である．地方債に関する金利収益は，政府の所得税が免除され，発行する州の収税と地方税も免除される．この特徴は，これらの債権の金利が同様の質を持つほかの証券と比べて低くても，投資家はそれを喜んで受け入れることを意味する．

・社債 corporate bond 事業や新しい投機的事業（ベンチャー）に対する資本を調達するために，企業が発行するものである．

・信託証書 indenture 債券に付随する条項の契約書信託証書の特徴

・コーラブル債 callable bond 発行者がある特定価格で債券を買い戻す権利を持つならば，債券はコール（任意償還）条項付きである．通常，このコール価格は時間とともに低下し，しばしば債券が中途償還できないコール権不行使期間がある．

・減債基金 sinking fund 満期に債券発行額面の全額を支払う債券を負うのではなく，発行者がこの債券の支払い期間を広げるために，減債基金を設置する場合がある．毎年債券の一部を買い戻す.

・債務の劣後 debt subordination 債券保有者を守るために，発行者による追加的な借入金額が設定される場合がある．また，他の債権を劣後とすることで，支払不能の際に債券保有者に対する支払いが，他の支払いよりも優先的に行われることを債券保有者は保証される．

・モーゲージ (mortgage) 持家所有者にとってモーゲージ (mortgage) は債券と逆の役割を果たすものである．将来持ち家を保有しようとする人は，家を買うために支払う現金を今すぐ手に入れるために，モーゲージ所有者（銀

行）に定期的な支払いを行う義務のある住宅モーゲージを売る．

・増額返済 baloon payment 数年間はあまり多くない額の定期支払いを行い，最後に増額返済を行い契約を終了する場合がある．

・変動利付モーゲージ adjustable-rate mortgage 金利インデックスによって期間の実行利率を調整する．モーゲージは，例えば持家所有者と銀行という二者間で契約が行われるので，通常は証券とは見なされていない．しかし，モーゲージは，典型的には大きなパッケージでひとかたまりとなり，金融機関の間で取引される．これらのモーゲージ担保証券 (mortgage-backed securities) はかなり流動的である．

・年金 (annuity) 年金は事前に決定されたスケジュールと公式に従って，保有者（年金受取人:annuitant）に定期的にお金を支払う契約である．

・逐次償却

・年価 (annual worth)

・債券 bond 発行時点で決められたルールに従って，保有者に金銭を支払う発行者の債務のことをいう．一般に債券は満期日にある特定の金額，すなわち額面価値 (face value, par value) を支払う．ほとんどの債権はクーポンの支払いを行う．最後の支払いは額面価値とクーポンになる．債券発行者は資本を今すぐに調達するために債券を売る．そして，指定された支払を行う義務を負う．多くの債権の価値は市場によって決定され，とき刻々変化する．

・買い呼び値 bid price ディーラーが債券に支払ってもよいと思う価格である．ゆえにこれは債券をすぐに売ることのできる価格である．

・売り呼び値 ask price ディーラーが債券を売っても良いと思っている価格である．ゆえにこれはすぐに債券を買うことのできる価格である．

・経過利息 (AI) 債券の価格式は経過利息を無視している．債券に支払う実際の金額は，経過利息を価格に加えたものである．Def: AI$=\frac{\text{(最後の利払いからの経過日数)}}{\text{(現在の利払い期間日数)}} \times$ クーポン額

・格付け 発行者がデフォルトするリスクの性質を特徴づけるために，格付け会社によって格付けされる.（Moody ’s や Standard & Poor ’s など）米国財務証券（国債）は本質的にデフォルト・リスクはないと考えられているので，格付けされない．高格付けまたは中格付けの債券は，投資適格 (investment grade) と考えられる．投機カテゴリー，もしくはその下の債権は，ジャンク債 (junk bond) と呼ばれる．

・利回り債券利回りとは支払い構造によって決まる金利のことを言う．具体的には支払い流列の現在価値が現在の債権と等しくなる金利である．他の利回りと区別するために満期利回り（yield to maturity :YTM）と呼ばれる．満期利回りλは以下の式を満たす．$P = F/[1+(\lambda/m)]^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{C/m}{[1+(\lambda/m)]^k}$ ただし，P:現在価値，F:額面価値，C:一年間に支払われるクーポンの総額，m:一年あたりのクーポンの支払い回数，n:残りの支払い期間数　である．

・価格，利回り曲線の定性的な性質一般的なルールとして，様々な債券の利回りは他の債権や確定利付証券の金利と非常に近い値を持保つ．このため譲渡性預金が 10 %の金利を提供するときに，ほとんどの人は 6 %の利回りの債券を買わない．債券利回り曲線の明らかな特徴の一つは負の勾配を持つ，つまり満期利回りが高ければ高いほど価格は下がる.「債券市場が下がった」といえば金利は上昇したということである．二つ目は利回りがクーポン率とちょうど同じである状況では債券はパー・ボンド (par bond) と呼ばれ，このとき債券の価値は額面価値に等しい．三つ目はクーポン率が増加するにつれて価格・利回り曲線は上昇する．四つ目は満期までの期間が長け

れば長いほど現在価値はあがり，パー・ボンドを過ぎた後は長ければ長いほど価値は下がる．つまり満期が長くなれば利回りに対する感度が大きくなる．

利回りが変化すれば債券価値も変化するという意味で，債券保有者は利回りリスクを負っている．これは，債券の短期間の価値に影響を与える瞬間的なリスクである．債券を持ち続ければ，約束されたクーポンを受け取り続け，満期には額面価値を受け取ることができる．従って債券は確定利付証券として分類される．満期前に債券を売却しようとすれば，価格は価格・利回り曲線に左右される．

結論：パー・ボンドよりも利回りが高い債券は現在価値が額面価値よりも小さくなり，満期までの期間が長ければ長いほど敏感に小さくなる．

他の利回り尺度

・直接利回り current yield(CY) Def:CY=(年利息)/(債券価格)*100
直接利回りは債券の年間収益の尺度を表わす.

・繰り上げ償還利回り yield to call(YTC) 債券が最も早く可能な日に実際に償還されると仮定して計算した内部収益率として定義される．

・デュレーション他の条件がすべて等しければ，長い満期の債権は短い満期の債券よりも価格・利回り曲線の勾配はより大きくなる．ゆえに長期債券 (long bond) の価格は短期債券 (short bond) の価格よりも金利変化に敏感である．しかし，満期自身は定量的な金利の完全な感度尺度を与えない．デュレーション (duration) と呼ばれる時間の長さのもう一つの尺度が，金利の直接的な感度尺度を与える．

Definition:

$$D = \frac{PV(t_0)t_0 + PV(t_1)t_1 + \cdots + PV(t_n)t_n)}{PV}$$

つまり確定利付商品のデュレーションは，支払が行われる（キャッシュ・フローが存在する）時間の加重平均である．D は時間の単位を持っている．債券を保有している場合（すなわち購入がキャッシュフローに含まれない場合）のようにキャッシュ・フローが非負であるとき $t_0 \le D \le t_n$ であることは明らかである．デュレーションは最初と最後のキャッシュ・フローの中間にある時間となる．デュレーションは個々の支払いの支払い日の平均となる．

・マコーレ・デュレーション Macaulay Duration
Definition

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n}(k/m)c_k/(1+(\lambda/m))^k}{\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{(1+(\lambda/m))}^k}$$

金利として債券利回り YTM を用いたデュレーションである．一般に期間あたりのクーポン率が c，期間あたりの利回りが y，年あたりの期間数が m で，満期までちょうど n 期間残っている債券のマコーレ・デュレーションは

$$D = \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc((1+y)^n - 1) + my}$$

で表わされる．

定性的なまとめ：長いデュレーション（20 年以上）が得られるのは，非常に長い期間，低いクーポン率の債権のみである．

・デュレーションと感度

デュレーションは利回りの変化に対する価格の感度を直接測る有益な指標である．これは現在価値を表わす式を微分することで得られる．**価格感度公式**は以下の通り．

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial \lambda} = -D_M \qquad (D_M = D/(1+(\lambda/m)))$$

λ は利回り．つまり価格の相対変化量は修正デュレーション D_M の -1 倍に等しい．また

$$\Delta P \approx -D_M P \Delta\lambda$$

とも考えられる．これにより，例えばゼロ・クーポン債は D_M が大きいので価格の変化量が大きい．つまり大きな金利リスクがある．(金融工学入門 P74 例 3.9)

・ポートフォリオのデュレーション

価格 P_iとデュレーション $D_i(i=1,2,\cdots,m)$ の m 個の確定利付証券があり，全ては共通の利回りで計算されるものと仮定しよう．これらの証券のポートフォリオのデュレーション D は

$$D=\sum_{i=1}^{m}w_iD_i \quad (w_i=P_i/\sum_{i=1}^{m}P_i \ , \ D_i=\sum_{k=0}^{n}t_kPV_k^{(i)}/P^{(i)})$$

・イミュニゼーション immunization 金利リスクの防御をするために債券ポートフォリオを構築する問題を解決すること．具体的にはポートフォリオの現在価値とデュレーションを債務流列のそれらと（近似的に）一致させることで解決する．また利回りが変化すると新しいポートフォリオは新しい利率ではイミュナイズされない．従ってときどきポートフォリオをリバランス (rebalance) するのが良い．また実際には米国 T ボンドでない場合にはデフォルト・リスクを分散するために 2 つ以上の債券が使われる．イミュニゼーションにはいくつか欠点を持っている．まず全ての利回りが等しいと仮定しているが実際にはいつもそうではない．通常長期債券は短期債券よりもいくらか高い利回りを持つ．また全ての債券の利回りの変化量が等しいという仮定も非現実的である．

・再投資リスク reinvestment risk 再投資リスクとは，満期となった定期預金証書 (CD) や債券などの確定利付証券から得た資金で，新しく同種の投資を行う場合のリスクのこと．再投資リスクとは，新規の投資で得られる利回りが，前の投資で得られた利回りと同じとは限らないというリスクである．実際，収益率が高くなる可能性もあるが，全体的な経済動向に基づけば，新規投資の収益率はかなり低くなる．

・コンベキシティ convexity 修正デュレーションについて二次の項まで含めることによってよりよい近似を得られる．この二次項は，価格-利回り曲線のある点における相対的な曲率を表わすコンベキシティ (convexity) に基づいえて求められる．定義は

$$C=\frac{1}{P}\frac{\partial^2P}{\partial\lambda^2}$$

これにより，

$$\Delta P\approx -D_MP\Delta\lambda+\frac{PC}{2}(\Delta\lambda)^2$$

を得る．イミュニゼーションにおけるコンベキシティの利用法は債券のポートフォリオの現在価値，デュレーション，コンベキシティが債券のそれらに一致するように債券ポートフォリオを構築することである．

§第４章　金利の期間構造

イールド・カーブ (利回り曲線) yield curve 利回りを満期までの関数として表したもの．利回りは満期までの時間が長くなれば長くなるにつれて徐々に上昇していく．ある特定の債権を調べるときに役に立つのは，その利回りと満期日を決定し，そのリスククラスの債権に対するイールド・カーブ上に，一つの点としてそれぞれをプロットすることである．このとき，この点がイールド・カーブから離れていれば，おそらく債券のコール条項か発行者の潜在的な支払能力に影響を与えるニュースのような特別な状況か，特別な特徴に関連する理由があるはずである．

逆イールド・カーブ inversed yield curve 長期債券が短期債券よりも低い利回りを持つ場合．短期金利が急激に増加したものの，投資家がその上昇は一時的であり，長期金利はその前の水準の近くにとどまると信じているときにおこりやすい．

期間構造

・スポット・レート spot rate スポット・レート s_t は年利で記述されるもので，現時点 (t=0) から t 時点まで保持されるお金にかかる金利である．例えば s_2 は２年間保有されるお金に支払われる１年あたりの金利である．従っ

て銀行が年複利で金額 A の 2 年物預金に s_2 の金利の支払いを約束するならば，実際には 2 年後に $(1+s_2)^2 A$ を支払う．
a) 年複利の場合：1 単位の資金を t 年間保有したときにそれが，

$$(1+s_t)^t$$

倍になるような s_t のことをいう．

b) 年あたり m 期間の複利の場合：年あたり m 期間の複利もとでは，スポット・レート s_t は，

$$(1+s_t/m)^{mt}$$

が増加係数となるように定義される．
c) 連続複利の場合：連続複利のもとではスポット・レート s_t は

$$e^{s_t t}$$

が増加係数となるものとして定義される．(ii の例で $m \to \infty$ としたもの)

・スポット・レート・カーヴ spot rate curve イールド・カーブに似ている．

割引係数と現在価値

・割引係数 discount factor (d_t) 将来のキャッシュ・フローと同等な現在価値を得るために掛ける係数である．

a) 年複利：

$$d_k = \frac{1}{(1+s_k)^k}$$

b) 年あたり m 期間の複利：

$$d_k = \frac{1}{(1+s_k/m)^{mk}}$$

c) 連続複利：

$$d_t = e^{-s_t t}$$

と各場合に定義される．

・スポット・レートの決定

スポット・レート・カーブは短い満期のものから始め，長い満期のものへ向かって進むことによって，利付債の価格をもとに求められる．例えば 1 年複利でその手続きを説明する．最初に一年金利の観測値から s_1 を決定する．例えば T ビルなどによる．次に年物債券を考える．債券の価格が P で，2 年間ともに年末に C の金額のクーポンが支払われ，額面価値は F であるものと仮定する．価格はキャッシュ・フロー流列の割引価値に等しくなるはずである．ゆえに

$$P = \frac{C}{1+s_1} + \frac{C+F}{(1+s_2)^2}$$

を満たす．s_1 は既知なので，この方程式を s_2 に対して解く．この方法を用いて 3 年債，4 年債と前進していけば，$s_3, s_4, \cdots$ を順番に決定することができる．スポット・レートを引き算によって求めることもできる．

・ゼロ・クーポン債の構築

債券 A は 10 %のクーポンの 10 年債である．その価格は $P_A = 98.72$ である．債券 B は 8 %のクーポンの 10 年債で，その価格は $P_B = 85.89$ である．両方の債権は同じ額面価値を持っており，100 に標準化されている．債券 A を -0.8 単位，債券 B を 1 単位もつポートフォリオを考えよう．このポートフォリオは 20 の額面価値を持ち，

その価格は $P = P_B - 0.8P_A = 6.914$ である．クーポン支払いは相殺されるので，これは，ゼロ・クーポン・ポートフォリオである．10 年スポット・レート s_{10} は

$$(1 + s_{10})^{10} P = 20$$

を満足しなければならない．従って，$s_{10} = 11.2$ % である．

フォワード・レート

・フォワード・レート forward rate　DEFINITION:　$t_1 < t_2$ である t_1 と t_2 時点の間のフォワード・レートを，f_{t_1,t_2} と記述する．それは，t_2 時点で（利息を）支払うお金を借りるときにかかる t_1 時点での金利である．また市場のフォワード・レート (market forward rate) と区別するために**インプライド・フォワード・レート (implied forward rate)** と呼ばれる．各複利の場合に対するフォワード・レートの公式は以下の通り．
a) 年複利の場合：

$$(1 + s_j)^j = (1 + s_i)^i (1 + f_{i,j})^{j-i}$$

ゆえに

$$f_{i,j} = \left(\frac{(1 + s_j)^j}{1 + s_i)^i}\right)^{1/(j-i)} - 1$$

b) 年あたり m 期間の複利：

$$(1 + s_j/m)^j = (1 + s_i/m)^i (1 + f_{i,j}/m)^{j-i}$$

を満足する．ゆえに，

$$f_{i,j} = m\left(\frac{(1 + s_j/m)^j}{(1 + s_i/m)^i}\right)^{1/(j-i)} - m$$

である．

c) 連続複利：

$$e^{s_{t_2} t_2} = e^{s_{t_1} t_1} e^{f_{t_1,t_2}(t_2 - t_1)}$$

を満足する．ゆえに

$$f_{t_1,t_2} = \frac{s_{t_2} t_2 - s_{t_1} t_1}{t_2 - t_1}$$

となる．

期間構造説

・期待仮説 expectation hypothesis

・流動性選好仮説 投資家は通常，長期の確定利付証券よりも，短期の確定利付証券を好むということである．この立場を正当化する最も単純な理由は，投資家は長期の証券に資本を固定することを好まないという事実である．投資家は資金を固定するよりも流動的 (liquid) であることを好む．

・市場分断仮説 期間構造に関してに関して市場分断仮説が主張するのは，確定利付証券の市場は，満期日によって分断されているということである．短期金利と長期金利は独立に動く．

期待ダイナミクス

・期待ダイナミクス expectation dynamics 現在のスポット・レート・カーブ $s_1, s_2, \cdots, s_n$ からはじめて，翌年のスポット・レート・カーブ $s'_1, s'_2, \cdots, s'_{n-1}$ を推定したいとする．foward rate $f_{1,j}$ が翌年のスポット・レート s'_{j-1} となる．つまり

$$s'_{j-1} = f_{1,j} = \left(\frac{(1 + s_j)^j}{1 + s_1}\right)^{1/(j-1)} - 1$$

となる．これは期待が実現するという仮定の下でのスポット・レート・カーブを更新する基本公式である．この変換を期待ダイナミクス (expectation dynamics) と呼ぶ.

割引係数

もうひとつ大切な概念は 2 時点間の割引係数 (discount factor) である．いま $d_{j,k}$ を k 時点で受け取る現金を j 時点における現金等価額に割り戻すために使われる割引係数とする．割引係数は forward rate を用いて

$$d_{j,k} = \left(\frac{1}{1 + f_{j,k}} \right)^{k-j}$$

と記述される．また k 時点から i 時点に割り引くには，最初に k 時点から途中の j 時点まで割引き，次いで，j 時点から i 時点まで割り引けばよい．言い換えれば，$i < j < k$ に関して,

$$d_{j,k} = d_{i,j} d_{j,k}$$

が成り立つ.

短期金利短期金利とは，1 期間にわたるフォワード・レートである．従って，k 時点での短期金利 r_k は $r_k = f_{k,k+1}$ である．またスポット・レート s_k は短期金利をもとに求めることができる．なぜなら

$$(1 + s_k)^k = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + r_i)$$

が成り立つからである.（k 期間預け続けた場合と毎期間再投資し続けた場合は同じ金額になる（無裁定））同様に,

$$(1 + j_{j,k})^{k-j} = \prod_{i=j}^{k-1} (1 + r_i)$$

が無裁定の原理から成り立つ.

短期金利のダイナミクスで魅力的な点は，スポット・レートは年々は変化するのに対し，短期金利は変化しない. 初期の短期金利 $r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}$ が与えられると,（期待ダイナミクスの下での）翌年の短期金利は $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ となる.

不変定理 金利が期待ダイナミクスによって変化すると仮定しよう.（年複利を仮定すると）n 年間金利市場に投資される資金の合計は,（資金がすべて投資される限り）投資戦略と再投資戦略とは独立に，$(1 + s_n)^n$ 倍に増加する.

逐次現在価値計算 (running present value)

現在価値の更新

$$PV(k) = x_k + d_{k,k+1} PV(k+1)$$

PV(k) は k 時点における現在価値，x_k は k 時点におけるキャッシュ・フローを表わす．また $d_{k,k+1} = 1/(1 + f_{k,k+1})$ は k 時点における短期金利での割引係数である.

変動利付債券

変動利付債券は固定の額面と固定の満期を持つ．しかし支払いは最新の短期金利によって決まる．利率が再設定 (reset) される.

定理 4.1　変動利付債券の価値は再設定時では額面に等しい.

デュレーション

フィッシャー・ワイルのデュレーション 連続複利の場合を想定する．キャッシュ・フロー流列 $(x_{t_0}, x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})$ とスポット・レート・カーブ s_t,$t_0 \leq t \leq t_n$ が与えられると，現在価値は,

$$PV = \sum_{i=0}^{n} x_{t_i} e^{-s_{t_i} t_i}$$

となる．そのとき，フィッシャー・ワイルのデュレーション (Fisher-Weil duration) は

$$D_{FW} = \frac{1}{PV}\sum_{i=0}^{n} t_i x_{t_i} e^{-s_{t_i} t_i}$$

と定義される．これはまさに，デュレーションをキャッシュ・フロー時点の現在価値の加重平均として，一般的に定義したものに相当することに注意.

イールド・カーブンの平行シフトに対する価格（現在価値）の感度を考える．価格は

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} x_{t_i} e^{-(s_{t_i}+\lambda)t_i}$$

となる．これを微分して

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}(\lambda = 0) = -\sum_{i=0}^{n} t_i x_{t_i} e^{-s_{t_i} t_i}$$

を求める．すると相対的な価格感度 (relative price sensitivity) は

$$\frac{1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW}$$

となる.

・離散時間の複利

年に m 回複利の場合を考えよう．期間 k のスポットー・レート s_k である（年率として表現する）．再びキャッシュ・フロー流列 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ を考える．価格は

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} x_k (1 + \frac{s_k + \lambda}{m})^{-k}$$

である．そして

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = -\sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{m}) x_k (1 + \frac{s_k}{m}^{-(k+1)}$$

となる．これを $-P(0)$ で割ることによって，デュレーション尺度と関連づけることができる．そこで

$$D_Q = -\frac{1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(k/m)x_k(1+s_k/m)^{-(k+1)}}{\sum_{k=0}^{n} x_k(1+s_k/m)^{-k}}$$

と定義する．この値 D_Q を**準修正デュレーション (quasi-modified duration)** と呼ぶ.

イミュニゼーション

金利の期間構造を使うと，ポートフォリオのイミュニゼーションに対してより頑健な方法が導かれる．この方法は第 3 章のように共通の利回りを持つ債券を選択することを想定しなくてよい．債務の流列に対して資金手当てをするために設計された資産ポートフォリオは，資金と債券の現在価値とデュレーションを一致させることによって，スポット・レート・カーブの平行シフトい対してイミュナイズすることができる.

§第 5 章　応用金利分析

・最適化 optimization

資本予算

・資本予算 capital budgeting 資本予算は通常はプロジェクトもしくは投資案に対する現金の配分を扱う．そこでは市場が十分に確立されておらず，プロジェクトは一定の現金を要する.

・ポートフォリオ問題 porfolio problem

・0-1 変数 zero-one variable

・0-1 計画問題 zero-one programming problem

・利益費用比率 benefit-cost raito 初期費用（負のキャッシュ・フロー) の大きさに対する利益（正のキャッシュ・フロー）の現在価値の比率

独立ではないプロジェクト

プロジェクトが独立ではない場合を考える．ある一つのプロジェクトの実行可能性が，他のプロジェクトが採用されうかどうかに依存する場合である．この条件を数式化する．一般に，m 個の目標と i 番目の目標に関連する n_i 個の可能なプロジェクトがあるものと仮定する．それぞれの目標に対して，1 つのプロジェクトのみが選択される．利用できる予算は固定されていて C とする．x_{ij} は 0-1 変数で，目標 i が選択され，プロジェクト j が実行されれば，変数 x_{ij} は 1 になる．さもなければ，0，である．各プロジェクトに対して b_{ij} は benefit，c_{ij} は cost を表わすものとする．

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}x_{ij} \\ \text{条件} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}x_{ij} \le C \\ & \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \le 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \end{aligned}$$

最適ポートフォリオ (optimal portfolio)

最適ポートフォリオという用語は通常金融市場の証券ポートフォリオ構築するときに使われる．しかしこの用語はプロジェクトの”ポートフォリオ”を構築するときに使われる．資産が市場で自由に取引されるときには，市場性のないより一般の資産には適用されないある価格関係が適用される．これは証券を含む問題に**ポートフォリオ最適化 (portfolio optimization)** という用語を使う場合の重要な相違である．

キャッシュ・マッチング問題

簡単な最適ポートフォリオ問題はキャッシュ・マッチング問題 (cash matching problem) である．この問題を記述するために，将来の既知な一連の資金債務に直面しているものと仮定する．これらの債務が生じるときにその要求を満たすように投資したい．もっとも簡単な方法は将来変更することなしに，要求されたときに必要な現金を要求するポートフォリオを設計することである．この問題を数学的に定式化するために，まず，各期末にキャッシュ・フローが生じるような基本的な期間の長さを定義する．例えば 1 期間を 6ヶ月とする．

§第 6 章　平均-分散ポートフォリオ理論

・資産 asset

・総収益 total return 総収益=受取金額/投資金額

・収益率 rate of return 収益率=(受取金額-投資金額)/投資金額

・空売り short sales

・ポートフォリオ収益の分散

個別資産の分散を σ_i^2，ポートフォリオの分散を σ^2，そして資産 i と j の収益率の共分散を σ_{ij} とする．

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\left[(r-\bar{r})^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i\right)^2\right] \\ &= \sum_{i,j}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\end{aligned}$$

収益率が互いに無相関である場合には n を大きくとれば分散化によってポートフォリオの分散をほとんど 0 にすることができる．また資産の間に正の相関がある場合には，n を十分大きくとっても分散を減少させることは難しく，実現可能なある下限値が存在する．

・実行可能領域 feasible region

・最小分散集合 minimum variance set 実行可能領域の左端の境界.

・最小分散点 minimum variance point :MVP 最小分散照合の中で分散最小となる点.

・リスク回避的 risk averse 投資家は同じ収益率ならば分散が一番小さいポートフォリオを選択するという性質.

・非飽和性 nonsatiation 投資家は同じリスク（分散）ならば収益率が一番大きいポートフォリオを選択するという性質.

・効率的フロンティア efficient frontier リスク回避的で非飽和性を満足する投資家は最小分散集合上の上半分のみに関心をもつことが分かる．この上半分の領域.

マーコビッツ・モデル

以下のモデルのことを指す.

$$\begin{aligned}&\mathit{minimize} && \frac{1}{2}\sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &\mathit{subject\ to} && \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}, \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\end{aligned}$$

つまり期待収益率 $\bar{r}$ を固定したときにボラティリティσ を最小にする最適化問題.

・2 ファンド定理　二つの効率的なファンド (ポートフォリオ) をもとに，全ての効率的なポートフォリオを生成することができる．すなわち，効率的なポートフォリオ (最小分散集合，もっと言うと効率的フロンティア上のポートフォリオ) に投資しようとする投資家はこれらの二つのファンドの組み合わせのみに投資すればよい.

・無リスク資産 risk-free asset

・1 ファンド定理　リスク資産によって構成される一つのファンド F(市場ポートフォリオ，効率的フロンティア上の無リスク資産を通る接線の接点) が存在し，任意の効率的ポートフォリオはこの資産 F と無リスク資産のを組み合わせることによって生成される．

1 ファンド定理の言いたいことは，市場ポートフォリオ以外のポートフォリオと無リスク資産の組み合わせたものはどんなものであっても，市場ポートフォリオと無リスク資産の組み合わせの直線より下側になる.（図から明らか）

§第 7 章　資本資産価格付けモデル

・市場ポートフォリオ market portfolio 市場ポートフォリオ中のある資産の重み w_i はその資産に割り当てられる資本の比率として定義される．(**市場総資本価値に関する重み**と呼ばれる)

・均衡 equilibrium

資本市場線

・効率的な資産の期待収益率 $\bar{r}$ と収益のリスク σ の関係式 (資本市場線) は

$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma$$

となる．

・リスクの価格 price of risk 資本市場曲線の勾配 $K = (\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M$

・資本資産価格付けモデル (CAPM) もし市場平均ポートフォリオ M が効率的であるならば，資産 i の期待収益率 $\bar{r}_i$ は

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_M - r_f)$$

で与えられる．ここで，

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

で与えられ，β_i は資産の**ベータ値**と呼ばれる．CAPM より資産の期待超過収益率は市場ポートフォリオの期待超過収益率に比例し，その比例係数はベータで与えられる．また資産の期待超過収益率は市場との共分散 σ_{iM} に比例する．

個別資産の期待超過収益率 expected excess return $\bar{r}_i - r_f$ のことを指す.

市場平均ポートフォリオの期待超過収益率 $\bar{r}_M - r_f$ のことを指す.

証券市場線

まず第 i 資産のランダムな収益を

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i$$

として CAPM からの誤差を ε_i で表現する．両辺の期待値をとれば，CAPM の理論より $E(\varepsilon_i) = 0$ になる．また $Cov(\varepsilon_i, r_M) = 0$ である．従って両辺の分散をとると

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + var(\varepsilon_i)$$

第 1 項を**システマティック・リスク (systematic risk)** と呼ぶ．このリスクは分散化によって減らすことはできない．なぜならベータ値が 0 でない資産は，どれもこのリスクを内包しているからである．第 2 項は**非システマティック・リスク (nonsystematic risk)，固有リスク (idiosyncratic risk)，個別リスク (specific risk)** と呼ばれる．このリスクは市場とは無相関であるので分散化によって減らすことができる．非システマティックリスクを含めば含むほど，その資産は資本市場線の右側に位置する．

投資への合意

・インデックス・ファンド index fund 市場ポートフォリオを十分良く近似するミューチュアル・ファンド

パフォーマンス評価

ジェンセンの指標 Jensen's index

$$\hat{\bar{r}} - r_f = J + \beta(\hat{\bar{r}}_M - r_f)$$

この誤差項 J をジェンセンの指標と呼ぶ.

シャープの指標 Sharpe index

$$\hat{\bar{r}} - r_f = S\sigma$$

この傾き S をシャープの指標と呼ぶ.

価格公式としての CAPM

CAPM の価格公式

$$P = \frac{Q}{a + r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)}$$

これは

$$r = \frac{Q-P}{P}$$

を代入したもの.

確実同値公式

$$P = \frac{1}{1+r_f}\left[\bar{Q} - \frac{Cov(Q, r_M)(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\right]$$

この公式から価格の線形性が分かる.

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 &= \frac{1}{1+r_f}\left[\bar{Q}_1 - \frac{Cov(Q_1, r_M)(\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}\right] + \frac{1}{1+r_f}\left[\bar{Q}_2 - \frac{Cov(Q_2, r_M)(\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}\right] \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left[(\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) - \frac{(Cov(Q_1, r_M) + Cov(Q_2, r_M))(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\right] \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left[(\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) - \frac{Cov(Q_1 + Q_2, r_M)(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\right] \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left[\bar{Q}_{1+2} - \frac{Cov(Q_{1+2}, r_M)(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\right] = P_{1+2}
\end{aligned}$$

プロジェクト選択

・純現在価値 (NPV)

$$NPV = -P + \frac{1}{1+r_f}\left[\bar{Q} - \frac{Cov(Q, r_M)(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\right]$$

第一項の負の項が初期投資額で，第二項が最終支払いの確実同値額である.

・調和定理 harmony theorem 企業が NPV を最大化していなければ，効率的フロンティアは閣僚可能である.

§第 9 章　一般原理

・効用関数　性質：連続な単調増加関数．指数効用関数や対数効用関数などがある.

・リスク中立 risk neutral 効用関数が線形関数 $U(x) = x$ であるとき．このタイプの効用関数はリスクについて何の考慮もしないからである.

等価な効用関数

効用関数は順序を決めるだけであって，その値自体に意味はない．従って

$$V(x) = aU(x) + b$$

とするとき $V(x)$ と $U(x)$ は同じ意味を持つ．

リスク回避

効用関数が凹関数であることとリスク回避であることの関係を示す．将来の富の水準として，二つの選択肢があるものとする．第 1 は x または y をそれぞれ確率 1/2 で手に入れるという選択肢である．(効用関数値の期待値は (U(x)+U(y))/2) 第 2 は $x/2 + y/2$ を確実に手に入れるという選択肢である．このとき効用関数が凹関数であるとき

$$\frac{U(x) + U(y)}{2} \leq U(\frac{x+y}{2})$$

が成り立つ．つまり

$$(\text{リスクありの効用関数の期待値}) \leq (\text{リスクなしの効用関数の期待値})$$

となる．つまり効用関数が凹関数であることはリスク回避的であることを示している．また $U(x) = x$ ならば上の不等式で等号が成り立つ．

$$(\text{リスクありの効用関数の期待値}) = (\text{リスクなしの効用関数の期待値})$$

つまり，リスクについて中立であることが分かる．(これがリスク中立であると呼ばれる所以である．) また，曲率が大きいほどリスク回避を好む．

リスク回避係数

リスク回避係数は

$$a(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

によって定義される．(Arrow-Pratt absolute rsik aversion coefficient) 分母の $U'(x)$ はこの係数を規格化するためである．ここで効用関数として $U(x) = logx$ を使うのが妥当であることを示す．

$$a(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{1}{x}$$

となる．これは「もっている富 (x) が多いときはリスクを気にしない ($a(x)$ が小さい)，少ないときはリスクを気にする ($a(x)$ が大きい)」ことを示しているので，ある意味妥当である．

確実同値額

確実同値額 C の定義は

$$U(C) = E\big[U(x)\big]$$

を満たす C のことを指す．

一例として，コインを投げて表なら 10 ドル，裏なら 0 ドル得られるギャンブルを考え，効用関数を $U(x) = x - 0.04x^2$ として考える．このときの確実同値額は 3.49 ドルである．つまりこのギャンブルは確実に 3.49 ドル得られるときの効用と等しい．効用関数が凹関数であれば $C \leq E(x)$ である．(リスクを冒した方が期待値が高いのは当然である．)

効用関数と平均-分散基準

二次効用関数 $U(x) = ax - \frac{1}{2}bx^2$ とする．

$$\begin{aligned} E\big[U(y)\big] &= E\left(ay - \frac{1}{2}by^2\right) \\ &= aE(y) - \frac{1}{2}bE(y^2) \\ &= aE(y) - \frac{1}{2}b\big[E(y)\big]^2 - \frac{1}{2}bVar(y) \end{aligned}$$

$E(y)$ が変化しないことを考えれば，分散 $Var(y)$ が小さければ $E\big[U(y)\big]$ は大きくなる．これは平均-分散アプローチと等価であることを示している．

正規収益率

全ての資産の収益率が正規分布に従う場合も，任意のリスク回避効用関数に関して，平均-分散基準は期待効用アプローチと等価になる．これを示すには $U(x)$ を平均 μ まわりで Taylor 展開すればよい．

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\mu)}{k!}(x-\mu)^k \\ &\approx U(\mu) + U'(\mu)(x-\mu) + \frac{U''(\mu)}{2}(x-\mu)^2 \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} E\big[U(x)\big] &\approx E\Big[U(\mu) + U'(\mu)(x-\mu) + \frac{U''(\mu)}{2}(x-\mu)^2\Big] \\ &= U(\mu) + U'(\mu)E(x-\mu) + \frac{U''(\mu)}{2}E(x-\mu)^2 \\ &= U(\mu) + \frac{U''(\mu)}{2}\sigma^2 \end{aligned}$$

ここで効用関数 $U(x)$ は凹関数 $(U''(x) < 0)$ なので，$E(U(x))$ を最大にするには分散 σ^2 を小さくすればよい．

線形価格公式

A タイプの裁定

もしある投資を行ったときに，それが直ちに正の報酬をもたらし，将来 (正であっても負であっても) 何の支払いをもたらさないとき，この投資は A タイプの裁定 (type A arbitrage) であるという．これから証券 $\alpha d_1 + \beta d_2$ の価格は $\alpha P_1 + \beta P_2$ となる．(線形価格公式)(linear pricing))

B タイプの裁定

ある投資を行ったときに，何も支払わずに (あるいは負の支払いで) 将来何かを得るチャンスがあることを意味する．(例えばただで買える宝くじなど)

A タイプの裁定から線形価格公式が導けた．一方 B タイプの裁定存在しないという条件を使うとより強い関係式を導くことができる．

ポートフォリオ選択

・ポートフォリオ選択定理　無裁定条件が成り立てば，ポートフォリオ選択問題 (P305) は最適解をもつ．

・ポートフォリオ価格方程式

$$\begin{aligned} &Maximize \quad E\bigg[U\bigg(\sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i\bigg)\bigg] \\ &Subjecto\ to \quad \sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i = W \end{aligned}$$

ラグランジュ関数を用いて

$$L = E\bigg[U\bigg(\sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i\bigg)\bigg] - \lambda\bigg(\sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i - W\bigg)$$

を θ_i で偏微分することで得られる．この結果

$$E\big[U'(x^*d_i\big] = \lambda P_i$$

が得られる．特に総収益が R である無リスク資産が存在するとすると $d_i = R,\ P_i = 1$ とおいて

$$\lambda = E\big[U'(x^*\big]R$$

よってこの λ を代入して

$$\frac{E\big[U'(x^*)d_i\big]}{RE\big[U'(x^*)\big]}$$

となる．

対数最適価格

支払い d をもたらす証券 (ポートフォリオ) の価格 P は

$$P = E(\frac{d}{R^*})$$

で与えられる．ここで R^* は対数最適ポートフォリオの収益である．これは d が確率的な場合には，R を R^* と置き換えて期待値をとればよいということである．(R=1+r と考えれば現在価値を求める式に似ている．)

有限状態モデル

ある一つの状態のみで支払いが行われる特別な証券を考える．そこでえ S 個の基本状態証券 (elementary state security)$e_s =< 0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0 >, s = 1, 2, \cdots, S$ を定義する．またこの証券の価格を ψ_s これは s 番目のみが 1 のベクトルである．任意の証券 $d =< d_1, d_2, \cdots, d_s >$ は基本状態証券の組み合わせとして $d = \sum_{i=1}^{S} d_i e_i$ と表わせるので

$$P = \sum_{i=1}^{S} d_i \psi_i$$

となる．

リスク中立価格付け

正の状態価格を $\psi_s,\ s = 1, 2, \cdots, S$ とすれば，任意の証券 $d =< d_1, d_2, \cdots, d_S >$ の価格は

$$P = \sum_{i=1}^{S} d_i \psi_i$$

となる．ここで $\psi_0 = \sum_{i=1}^{S} \psi_i$に対して $q_s = \psi_s/\psi_0$ (q_sを人工確率とする) とすれば

$$P = \psi_0 \sum_{i=1}^{S} q_s d_s = \psi_0 \hat{E}(d)$$

となる．ここで $\hat{E}(d)$ は人工的確率 q_s に関する期待値を表わす．

ψ_0 は次のように解釈することができる．$\psi_0 = \sum_{i=1}^{S} \psi_i$ だから，ψ_0 は証券¡$1, 1, \cdots, 1$¿，すなわち全ての状態で 1 を支払う証券，つまり無リスク証券の価格に等しい．定義により，R を無リスク証券の収益とすると，その価格は 1/R となる．これにより，

$$P = \frac{1}{R}\hat{E}(d)$$

となる．これはリスク中立価格付け (risk-neutral pricing) と呼ばれる．何故ならば，q_s を真の確率とし，リスク中立な効用関数 (すなわち 1 次関数) を用いたときに得られる公式と一致するからである．従って q_s を**リスク中立確率**という．

§その他

・満期 mature

・primary market: The market for new securities issues. In the primary market the security is purchased directly from the issuer. This differs from the secondary market.

・secondary market A market in which an investor purchases a security from another investor rather than the issuer, subsequent to the original issuance in the primary market. also called. InvestorWords.com

・issuer A company or municipality offering (or having already offered) securities for sale to investors. Examples include corporations, investment trusts.

・コール（繰上げ償還） call 発行体が満期前に債券或いは優先株を償還できる権利。あるいはその権利を行使すること。金利が大幅に低下し、発行体にとって低い金利で新発債を発行したほうが節約になるというときは、通常、利率の高い既発債は繰上げ償還されることになる。発行体がいつからコールをかけるようになっているかなど、コール条項（繰上げ償還条項）については債券の目論見書に明記されているので、必ず確認のこと。

・コーラブル債（繰上げ償還条項付き債券）callable bond 発行体が満期前に償還できる権利を有している債券。繰上げ償還日（コールデート）とその償還価格（コールプライス）は、あらかじめ定められているが、その時期になって、債券のクーポンレート　（表面利率）が実勢レートよりも高い場合は繰上げ償還される危険性がある。万一コールがかかってしまった場合、その償還金をこれまでと同じくらいの、利回りの高い債券に再投資するのは、まず不可能となる。

・ゼロクーポン債（割引債）zero-coupon bond 毎年、何のクーポン収入も得られないが、その代わり、額面よりも大幅に割引された価格で購入できる（ちなみに、ゼロクーポン債の米国債バージョンを「ストリップス債」という)。償還時には複利計算された利息相当分がまとめて全額支払われ、債券の額面金額が戻ってくる。とはいえ、理論上では利息は半年複利で増えていくため、経過利息相当分に対して、毎年税金が課されることになる。投資家の中には大学の授業料など、特定の出費予定の時期に、ちょうど償還するようなゼロクーポン債を選んで購入する人が多い。