数学 IA 講義ノート(No.1)　　理科一類 37 組

～はじめに～

基本的には講義ノートなので,特に目新しい内容はないと思います.構成としては,基本事項や定理,そして(申し訳程度ですが)例題を一通り提示し,最後に定理の証明と例題の解答を掲載するという形式をとりました.

…ちなみに全部で 24 ページ(!)あるので,必要なところだけ抜粋しながら読み進めていくことを勧めます.

第 1 章 極限と連続関数

§1.1 記号

数の集合の内,基本的なものをあげておきます.

$\mathbb{N}$ …自然数(natural number)の集合.0 を含むか否かは時と場合によるので注意が必要.

$\mathbb{Z}$ …整数(integer)の集合.ドイツ語で数を表す"zahlen"の頭文字.

$\mathbb{Q}$ …有理数(rational number)の集合.商を意味する"quotient"の頭文字.

$\mathbb{R}$ …実数(real number)の集合.

$\mathbb{C}$ …複素数(complex number)の集合.

ここでは特に注意しない限り,自然数は「正の整数」としておきます.

論理記号としては,とりあえず次の二つを覚えておけば問題ないでしょう.

$\forall$(全称記号)…「すべての～」,「任意の～」を意味する."for all",あるいは"any"などと読む.

$\exists$(存在記号)…「～が存在する」の意味."exist"などと読む.

たとえば,「$^\forall x\,[P(x)]$」と書けば「すべてのxについて$P(x)$が成り立つ」という意味になるわけです.ここでは見やすさを優先し,文字の左肩に$\forall$や$\exists$を付けるという記法を採用します.

また,$\exists!$と書くと,「～がただ一つ存在する」という意味になります.

Ex1.1.1 次の命題の真偽を判定せよ.

(1) $^\forall x \in \mathbb{R}\,[x^2 \geq 0]$

(2) $^\exists x \in \mathbb{R}\,[x^2 \leq 0]$

(3) $^\forall x \in \mathbb{R}\,^\exists y \in \mathbb{R}\,[x = y^2]$

また,証明は省略しますが,次の式が成り立ちます.

$$\neg(^\forall x\,[P(x)]) = {}^\exists x\,[\neg P(x)]$$
$$\neg(^\exists x\,[P(x)]) = {}^\forall x\,[\neg P(x)]$$

"$\neg$"は否定を表す記号です.つまり,

「すべてのxについては$P(x)$が成り立たない」$\Leftrightarrow$「$P(x)$が成り立たないようなxが存在する」

「$P(x)$が成り立つようなxは存在しない」$\Leftrightarrow$「すべてのxについて$P(x)$が成り立たない」

ということになります.直観的には明らかですね.

Ex1.1.2 次の命題の否定を書け.

(1) $^\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 > 0]$

(2) $^\exists a \in \mathbb{R}\,^\forall \varepsilon > 0\,^\exists N \in \mathbb{N}\,^\forall n \geq N\ \left[\left|\frac{1}{n} - a\right| < \varepsilon\right]$

§1.2 数の基本性質と数列の極限

数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$が収束するとは,

$$^\exists a \in \mathbb{R}\,^\forall \varepsilon > 0\,^\exists N \in \mathbb{N}\,^\forall n \geq N\ [|a_n - a| < \varepsilon] \tag{1.2.1}$$

ということです.記号がたくさんあってわかりにくいので,日本語に直してみましょう.

「ある実数a(極限値)が存在して,任意の正数εに対しある自然数Nが存在して,
N以上の全てのnに対し$|a_n - a| < \varepsilon$となる」

つまり,「nを十分大きくとれば, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$はある実数に限りなく近づく」ということです.(1.2.1)が数列の収束の定義として妥当だということがわかってもらえると思います.数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$がaに収束することを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, a_n \to a\,(n \to \infty)$$

などと書きます.また, 数列が収束しないことを発散するといいます.

Ex1.2.1 数列が収束することの定義(1.2.1)を用いて,次の数列の収束,発散を判定せよ.

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

(2) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

(3) $a_n = (-1)^n$

定理 1.2.1 $x_n \to x$かつ$x_n \to y$ならば,$x = y$

定理 1.2.2 収束する数列は有界[1]である.

定理 1.2.3(はさみうちの原理) $^\forall n\ [x_n \leq y_n \leq z_n]$かつ$x_n \to x\,, z_n \to x$ならば,$y_n \to x$

定理 1.2.4 $^\forall n\ [x_n \geq a]$かつ$x_n \to x$ならば,$x \geq a$

---

[1] Sを$\mathbb{R}$の部分集合としたとき,Sが上に有界であるとは,

$$^\exists M \in \mathbb{R}\,^\forall x \in S\ [x \leq M]$$

となることです.このMをSの上界といいます.また,不等式を逆にすることで「下に有界」,「下界」も同様に定義されます.上にも下にも有界のとき,単に有界といいます.

定理 1.2.5 $x_n \to x$かつ$y_n \to y$のとき,次式が成り立つ.
(1) $ax_n + by_n \to ax + by\ (a, b \in \mathbb{R})$
(2) $x_n y_n \to xy$
(3) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ (ただし,$y_n \neq 0$, $y \neq 0$)

公理 1.2.6 上[下]に有界な単調増加[減少]数列は収束する.

定理 1.2.7(Archimedes の公理) $^\forall a, b > 0 ^\exists n \in \mathbb{N}\ [na > b]$

定理 1.2.8(Weierstrass の定理) $S \in \mathbb{R}$が上[下]に有界ならば,Sの最小上界$\sup S$[最大下界$\inf S$] [2]が存在する.

定理 1.2.9 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$を有界な数列とし,$\alpha = \limsup_{n\to\infty} x_n$ [3]とすると,ある狭義単調増加自然数列$(n_k)_{k=1}^{\infty}$が存在して,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha.$$

Ex1.2.2 $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$のとき, $\limsup_{n\to\infty} x_n$を求めよ.

系 1.2.10(Bolzano-Weierstrass の定理) 任意の有界な数列は,収束する部分列を持つ.

定理 1.2.11 数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$が Cauchy 列[4]であることは, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$が収束することの必要十分条件である.

系 1.2.12(Cauchy の収束条件) 無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$が収束することの必要十分条件は,

$$^\forall \varepsilon > 0 ^\exists N \in \mathbb{N} ^\forall m \geq N \left[\left| \sum_{n=N+1}^{m} x_n \right| < \varepsilon \right]$$

となることである.

---

[2] 最小上界とは上界の内最小のものを指し,最大下界も同様に定義されます.なお,最小上界のことを上限,最大下界のことを下限ということがあります.

[3] $(x_n)_{n=1}^{\infty}$を有界な数列とし,$s_n = \sup\{x_m : m \geq n\}$とします.このとき, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$の上極限を

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

と定義します.**なお,ここで数列$(s_n)_{n=1}^{\infty}$は単調減少かつ下に有界ですから,公理 1.2.6 により収束します.**

[4] 数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$が Cauchy 列であるとは,

$$^\forall \varepsilon > 0 ^\exists N \in \mathbb{N} ^\forall m, n \geq N\ [|x_m - x_n| < \varepsilon]$$

となることである.

定理 1.2.13 絶対収束[5]する級数は収束する.

定理 1.2.14 $\alpha \geq 0$に対して,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$が収束することの必要十分条件は,$\alpha > 1$である.

Ex1.2.3 次の級数の収束,発散を判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Ex1.2.4 次の等式を示せ.((2)はやりたい人だけどうぞ)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2$

注: 定理 1.2.13 の逆は成り立たない.たとえば,級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$は収束する(Ex1.2.4)が,絶対収束しない(定理 1.2.14).

Ex.1.2.5 無限級数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$は収束することを示せ.また,その和を$e$とおくと,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

となることを示せ.

§1.3 連続関数

$f: D \to \mathbb{R}$のとき, fが点cで連続であるとは,点cに収束する任意の数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}(\in D)$に対して$f(x_n) \to f(c)(n \to \infty)$となるときをいいます.また,$D$内のすべての点で連続のとき,単に$f$は連続であるといいます.関数の連続性を判定するのに次の$\varepsilon - \delta$条件をしばしば使います.

定理 1.3.1($\varepsilon - \delta$条件) 関数fが点cで連続であることの必要十分条件は,

$$^{\forall}\varepsilon > 0\, ^{\exists}\delta > 0\ [|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon] \tag{1.3.1}$$

となることである.

[5] 無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$が絶対収束するとは,$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$が収束することです.

Ex1.3.1 次の関数が与えられた定義域において連続であることを示せ.
(1) $f(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$
(2) $f(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$
(3) $a > 1$に対し,$f(x) = a^x\ (x \in \mathbb{R})$

Ex1.3.2 $f(x)$が連続ならば$|f(x)|$も連続であることを示せ.

点cに収束する任意の数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$に対して$f(x_n) \to \alpha$のとき,
$$\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$$
と書きます.この表記を用いると,関数の連続性の定義は
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$
と書くこともできます.

定理 1.3.2 関数$f, g: D \to \mathbb{R}$が連続ならば,$\alpha f + \beta g\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, fg, $\frac{f}{g}$ (gの零点を除く)も連続である.

定理 1.3.3 関数f, gが連続,かつ合成関数$f \circ g$が定義できるなら,$f \circ g$も連続である.

たとえば,$f(x) = x$は連続だから,その累乗の線形和で表される多項式$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$も連続となるわけです.

定理 1.3.4(中間値の定理) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$が連続,かつ$f(a) < y < f(b)$のとき,
$$^{\exists}c \in (a, b)\ [f(c) = y]$$

Ex1.3.3 奇数次方程式は実解を持つことを示せ.

中間値の定理の逆は成り立ちませんが,次の定理が成立します.

定理 1.3.5 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$が単調増加のとき,
$$^{\forall}y \in [f(a), f(b)]\, ^{\exists}x \in (a, b)\ [f(x) = y] \Longrightarrow f\text{は連続}$$

定理 1.3.6(逆関数の存在) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$が連続かつ狭義単調増加のとき,
$$^{\exists!}f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]\ \left[f^{-1}\big(f(x)\big) = x,\ f^{-1}\text{は連続}\right]$$
このf^{-1}をfの逆関数とよび,"f inverse"と読む.

定理 1.3.7 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$が連続のとき,次が成り立つ.
(1) fは有界である.
(2) fは最大値,最小値を持つ.
(3) fは一様連続[6]である.

Ex1.3.4 次の関数が一様連続かどうか判定せよ.
(1) $f(x) = \sin x \ (x \in \mathbb{R})$
(2) $f(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R})$
(3) $f(x) = \sin\frac{\pi}{x} \ (0 < x < 1)$

[6] 関数fが一様連続であるとは,
$$^\forall\varepsilon > 0\ ^\exists\delta > 0\ [|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon] \tag{1.3.2}$$
となることです. $\varepsilon - \delta$条件(式(1.3.1))と似ていますが,本質的に違う概念なので注意が必要です.
連続だけど一様連続でない関数としては,たとえば$f(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$があります.実際,$x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$とすると,$n \to \infty$において$|x_n - y_n| \to 0$ですが, $|f(x_n) - f(y_n)|$は常に 1 となり,式(1.3.2)を満たしません.

Column ～実数の連続性～

ここでは細かいことをお話しさせていただくだけなので,興味のない方は読み飛ばしてもらって構いません.
さて,たとえば微積分学の教科書を開いてみると,実数の性質として次のような命題を目にすると思います.

定理(Cantor の公理) 2 つの数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$において,
(1) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$,
(2) nが限りなく大きくなると, $b_n - a_n$は限りなく 0 に近づく
という 2 条件が成り立つならば,

$$^{\exists!}c\,^{\forall}n\ [a_n \leq c \leq b_n]$$

ここで「定理」と書いたのは,先に述べた公理 1.2.6 からこの命題を証明できるからです(ここでは割愛させていただきます).公理というのは,「これが成り立つものとして議論を進めていこう」みたいな感じの,いわばその理論の土台を形成するような命題です.「Cantor の公理」などという名前がついているのにそれを別の命題から示すことができるとはどういうことなのでしょうか?
…実を言うと,次の 4 つの命題は同値であることが知られていて,いずれも「実数の連続性の公理」とよばれる場合があります.

(1) Archimedes の公理(定理 1.2.8)と Cantor の公理
(2) 上に有界な単調増加数列は収束する(公理 1.2.6)
(3) $\mathbb{R}$の部分集合Sが上に有界ならば,最小上界が存在する(定理 1.2.7)
(4) 任意の有界な数列は,収束する部分列を持つ.(系 1.2.10)

つまり,これらの内どの命題を公理として決めても数学の理論体系として何ら変わることはないわけで,この講義ではたまたま命題(2)を公理として議論を進めていったという,単にそれだけのことなのです.
ちなみに,この他にも「連続性の公理」と同値な命題はいくつか知られています(「Dedekind の切断」など).

付録 A 定理の証明

この講義で登場した定理の証明です.練習問題として自分で証明をつけて,ここで確認するのもよし.ただただ眺めて数学の奥深さに思いを馳せるのもよし.好きなように利用して下さい.

(定理 1.2.1) 背理法で示すため,$x \neq y$としておく.$\varepsilon = \frac{|x-y|}{3}$とすると,$\varepsilon > 0$である.

$x_n \to x$なので,

$$^\exists N_1 \in \mathbb{N}\ [n \geq N_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon]$$

同様に,$x_n \to y$なので,

$$^\exists N_2 \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2 \Longrightarrow |x_n - y| < \varepsilon].$$

このとき,$N = \max\{N_1, N_2\}$に対して,

$$|x-y| \leq |x - x_N| + |x_N - y| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|x-y|.$$

これは$|x-y| > 0$に矛盾.よって$x = y$. (Q.E.D.)

(定理 1.2.2) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$がxに収束するとすると,

$$^\exists N \in \mathbb{N}\ [n \geq N \Longrightarrow |x_n - x| < 1].$$

$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |x| + 1\}$とすれば,$^\forall n$で$|x_n| \leq M$となる.
実際,$n \leq N$のときは明らかであり,$n \geq N$においては

$$|x_n| \leq |x| + |x_n - x| < |x| + 1 \leq M$$

となる. (Q.E.D.)

(定理 1.2.3) 任意に$\varepsilon > 0$をとる.
$x_n \to x$なので,

$$^\exists N_1 \in \mathbb{N}\ [n \geq N_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon]$$

同様に,$z_n \to x$なので,

$$^\exists N_2 \in \mathbb{N}\ [n \geq N_2 \Longrightarrow |z_n - x| < \varepsilon]$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$とすると, $^\forall n \geq N$において,仮定より

$$x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x$$

であるから,

$$|y_n - x| \leq \max\{|x_n - x|, |z_n - x|\} < \varepsilon.$$

よって,$y_n \to x$である. (Q.E.D.)

(定理 1.2.4) 背理法で示すため, $^\forall n\ [x_n \geq a]$かつ$x_n \to x$であって,$x < a$と仮定する.
$x_n \to x$より,

$$^\forall\varepsilon > 0\, ^\exists N \in \mathbb{N}\, ^\forall n \geq N\ [|x_n - x| < \varepsilon]. \tag{A.1}$$

しかし,

$$^\exists\delta > 0\ [x + \delta < a]$$

であるから,$0 < \varepsilon < \delta$となるεをとれば,

$$|x_n - x| = x_n - x \geq a - x > \delta > \varepsilon$$

となる.なお,ここで$^\forall n\ [x_n \geq a > x]$を用いた.これは式(A.1)に矛盾する.

よって, $^\forall n\ [x_n \geq a]$かつ$x_n \to x$ならば,$x \geq a$. (Q.E.D.)

(定理 1.2.5) (1)を示す.$M = \max\{|a|, |b|\} + 1$とすると$M > 0$であり, $x_n \to x$かつ$y_n \to y$より, 任意の$\varepsilon > 0$に対し,

$$\begin{aligned} &^\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \left[n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}\right], \\ &^\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \left[n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}\right] \end{aligned} \tag{A.2}$$

となるから,$N = \max\{|N_1|, |N_2|\}$とすると,$^\forall n \geq N$において,

$$\begin{aligned} |(ax_n + by_n) - (ax + by)| &= |a(x_n - x) + b(y_n - y)| \leq |a||x_n - x| + |b||y_n - y| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, $ax_n + by_n \to ax + by$.

(2)を示す.定理 1.2.2 より,数列$(x_n)_{n=1}^\infty$は有界であるから,その上界のひとつをM_1とする.

$M = \max\{M_1, |y|\} + 1$とすると, $M > 0$であり,(1)と同様に式(A.2)が成り立つから,

$$|x_n y_n - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon.$$

よって, $x_n y_n \to xy$.

(3)を示す.(2)より,$\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$を示せば十分である.ここで,$y_n \to y$だから,

$$^\forall\varepsilon > 0\, ^\exists N \in \mathbb{N}\, ^\forall n \geq N\ \left[|y_n| > \frac{|y|}{2}, |y_n - y| < \frac{\varepsilon|y|^2}{2}\right]$$

である.従って, $n \geq N$のとき,

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y||y_n|} < \frac{\frac{\varepsilon|y|^2}{2}}{|y| \cdot \frac{|y|}{2}} = \varepsilon.$$

よって, $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$. (Q.E.D.)

(定理 1.2.7) 背理法で示すため,$^\forall n\ [na \leq b]$と仮定する.このとき,数列$(na)_{n=1}^\infty$は上に有界な

単調増加列だから,公理 1.2.6 により収束する.その極限値をαとおくと,

$$^\forall\varepsilon > 0\, ^\exists N \in \mathbb{N}\, ^\forall n \geq N\ [|nb - \alpha| < \varepsilon]$$

が成り立つ.特に,$\varepsilon = \frac{b}{2}(> 0)$とすると,

$$|Nb - \alpha| < \frac{b}{2}, |(N+1)b - \alpha| < \frac{b}{2}.$$

従って,

$$b = \left|\big((N+1)b - \alpha\big) - (Nb - \alpha)\right| \leq |(N+1)b - \alpha| + |Nb - \alpha| < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$$

を得る.これは矛盾である.

よって, $^\exists n\ [na > b]$. (Q.E.D.)

(定理 1.2.8) Sが上に有界とし,上界の 1 つをb_1とする.また,Sの上界でない数を 1 つとりaとおく.このとき$a_1 < b_1$である.

さて,$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$とおく. m_1がSの上界ならば $a_2 = a_1, b_2 = m_1$とし, m_1がSの上界でなければ $a_2 = m_1, b_2 = b_1$とする.このときb_2はSの上界であり, a_2はSの上界でない.また,

$$a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1, b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

が成り立つ.以下これを繰り返し, Sの上界b_nと Sの上界でないa_nを,

$$b_n > a_n, b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

を満たすように選んで単調増加数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$及び単調減少数列$(b_n)_{n=1}^{\infty}$を構成できる.このとき, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$は下に有界な単調減少列だから,公理 1.2.6 により収束する.その極限値をbとおくと,各b_nはSの上界であるから,bもSの上界となる.

bが最小上界であることを示そう.定理 1.2.7 より,$^\forall\varepsilon > 0$に対し, $\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} < \varepsilon$となるような$n$をとることができる.このとき,$b_n - a_n < \varepsilon$だから,

$$b - \varepsilon \leq b_n - \varepsilon < a_n.$$

a_nはSの上界でないから, $b - \varepsilon$も上界でない.よってbは最小上界である.

Sが下に有界であるときも,同様に示される. (Q.E.D.)

(定理 1.2.9) $^\forall k \in \mathbb{N}\ \left[\left|x_{n_k} - \alpha\right| < \frac{1}{k}\right]$となるような狭義単調増加自然数列$(n_k)_{k=1}^{\infty}$を帰納的に構成しよう.$s_n = \sup\{x_m : m \geq n\}$とすると,$\alpha = \lim_{n\to\infty} s_n$より,

$$^\exists N \in \mathbb{N}\ \left[|s_N - \alpha| < \frac{1}{2}\right].$$

また,$^\exists N_1 \geq N\ \left[x_{N_1} + \frac{1}{2} > s_N\right]$かつ$x_{N_1} \leq s_N$であるから,

$$\left|x_{N_1}-\alpha\right| \le \left|x_{N_1}-s_N\right| + |s_N-\alpha| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

を得る.従って,$n_1 = N_1$とすればよい.
さて,n_{k-1} $(k \ge 2)$が定まったとしよう. $\alpha = \lim_{n\to\infty} s_n$ より,

$$^{\exists}N > n_{k-1} \left[|s_N-\alpha| < \frac{1}{2k}\right].$$

$s_n = \sup\{x_m : m \ge n\}$であるから,

$$^{\exists}N_k \ge N \left[x_{N_k} + \frac{1}{2\mathrm{k}} > s_N\right] \text{ かつ } x_{N_k} \le s_N.$$

よって,

$$\left|x_{N_k}-\alpha\right| \le \left|x_{N_k}-s_N\right| + |s_N-\alpha| < \frac{1}{2k}+\frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

となるから,$n_k = N_k$とすればよい.
以上のように$(n_k)_{k=1}^{\infty}$をつくると,$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. (Q.E.D.)

(系 1.2.10) 定理 1.2.9 の証明において,有界な数列に対してその上極限に収束するような部分列が具体的に構成できたのだから,自明である. (Q.E.D.)

(定理 1.2.11) まず必要性を示す.数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$が収束するとしよう.その極限値をxとおくと,

$$^{\forall}\varepsilon > 0\, ^{\exists}N \in \mathbb{N}\, ^{\forall}n \ge N \left[|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

であるから,$^{\forall}m, n > 0$に対して

$$|x_m - x_n| \le |x_m - x| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

よって$(x_n)_{n=1}^{\infty}$は Cauchy 列である.
次に十分性を示す. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$が Cauchy 列だとしよう.このとき,

$$^{\forall}\varepsilon > 0\, ^{\exists}N \in \mathbb{N}\, ^{\forall}n \ge N\, [|x_n - x_N| < \varepsilon]$$

であるから,数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$は有界である.Bolzano-Weierstrass の定理(系 1.2.10)より,$(x_n)_{n=1}^{\infty}$には収束部分列$\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$が存在する.
さて,$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$とおく.$x_n \to x$を示そう. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$は Cauchy 列だから,

$$^{\forall}\varepsilon > 0\, ^{\exists}N \in \mathbb{N}\, ^{\forall}m, n \ge N \left[|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

また,$x_{n_k} \to x$より,

$$^{\exists}k_0 \in \mathbb{N} \left[n_{k_0} \ge N, \left|x_{n_{k_0}} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

このとき,$^{\forall}n \ge N$に対し,

$$|x_n - x| \le \left|x_n - x_{n_{k_0}}\right| + \left|x_{n_{k_0}} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

よって$x_n \to x$. (Q.E.D.)

(定理 1.2.12) 定理 1.2.11 より,

$$\text{無限級数}\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ が収束} \Leftrightarrow \text{数列}\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right)_{N=1}^{\infty} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon > 0\, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}\, {}^{\forall}m \geq N \left[\left|\sum_{n=1}^{m} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n\right| < \varepsilon\right]$$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon > 0\, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}\, {}^{\forall}m \geq N \left[\left|\sum_{n=N+1}^{m} x_n\right| < \varepsilon\right]$$

となる. (Q.E.D.)

(定理 1.2.13) 無限級数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$が絶対収束するとき,Cauchy の収束条件(定理 1.2.12)より,

$${}^{\forall}\varepsilon > 0\, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}\, {}^{\forall}n > m \geq N \left[\sum_{k=m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon\right]$$

であるから,

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon$$

となる.よって,定理 1.2.12 より, 無限級数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$は収束する. (Q.E.D.)

(定理 1.2.14) まず$\alpha = 1$のとき,$x \in [n\,, n+1]$に対して$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$だから,

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_{n}^{n+1} \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n}.$$

従って,辺々$n = 1$からNまで足し合わせて,

$$\int_{1}^{N+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_{1}^{N+1} \frac{1}{x} dx = \log(N+1) \to +\infty \ (N \to \infty)$$

であるから, $+\infty$に発散する.

次に$0 < \alpha < 1$のとき,$\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$であるから,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to +\infty \ (N \to \infty)$$

となり, $+\infty$に発散する.

最後に$\alpha > 1$のとき,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}=1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^\alpha}\leq 1+\int_1^N\frac{1}{x^\alpha}dx=1+\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{N^{\alpha-1}}\leq\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

であるから,数列$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}\right)_{N=1}^{\infty}$は上に有界な単調増加列となり,公理 1.2.6 により収束する.

(Q.E.D.)

(定理 1.3.1) まず十分性を示す.$x_n \to c$となるような任意の数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$に対し,$f(x_n)\to f(c)$を示せばよい. $\varepsilon-\delta$条件より,

$$^\forall\varepsilon>0\,^\exists\delta>0\ [|x-c|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon].$$

また,$x_n \to c$なので,

$$^\exists N\in\mathbb{N}\ [n\geq N \Longrightarrow |x_n-c|<\varepsilon].$$

このとき,

$$^\forall n\geq N\ [|f(x_n)-f(c)|<\varepsilon]$$

であるから,$f(x_n)\to f(c)$となる.

次に必要性を示す.対偶

$$^\exists\varepsilon>0\,^\forall\delta>0\,^\exists x\ [|x-c|<\delta\ \wedge\ |f(x)-f(c)|\geq\varepsilon] \Longrightarrow f\text{は}c\text{で連続でない}$$

を示せばよい.εを固定して,$\delta=\frac{1}{n}$とおけば,

$$^\exists x_n\ \left[|x_n-c|<\frac{1}{n}\Longrightarrow |f(x_n)-f(c)|\geq\varepsilon\right].$$

このとき,$x_n\to c$だが$f(x_n)\nrightarrow f(c)$,つまりfはcで連続でない.　(Q.E.D.)

(定理 1.3.2) f,gの連続性より,$x\to c$のとき$f(x)\to f(c)$, $g(x)\to g(c)$である.

まず$\alpha f+\beta g$の連続性を示す.$M=\max\{|\alpha|,|\beta|\}+1$とおくと$M>0$であり,任意に$\varepsilon>0$を与えると$\delta_1>0$, $\delta_2>0$が存在して,

$$0<|x-c|<\delta_1\ \Longrightarrow\ |f(x)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

$$0<|x-c|<\delta_2\ \Longrightarrow\ |g(x)-g(c)|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

となる.よって,$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$とおくと$0<|x-c|<\delta$のとき,

$$\left|\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)-\big(\alpha f(c)+\beta g(c)\big)\right|\leq|\alpha||f(x)-f(c)|+|\beta||g(x)-g(c)|$$

$$<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

従って,$\alpha f+\beta g$は連続である.

次にfgの連続性を示す.

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(c)g(c)| \\ &= \big|\big(f(x)-f(c)\big)\big(g(x)-g(c)\big)+g(c)\big(f(x)-f(c)\big)+f(c)\big(g(x)-g(c)\big)\big| \\ &\leq |f(x)-f(c)||g(x)-g(c)|+|g(c)||f(x)-f(c)|+|f(c)||g(x)-g(c)|\end{aligned}$$

である.任意に$\varepsilon' > 0$を与えると$\delta > 0$が存在して,

$$0 < |x-c| < \delta \implies |f(x)-f(c)| < \varepsilon', |g(x)-g(c)| < \varepsilon'$$

が成り立つから,上の式より

$$|f(x)g(x)-f(c)g(c)| \leq (\varepsilon')^2 + |g(c)|\varepsilon' + |f(c)|\varepsilon' = \varepsilon'(|f(c)|+|g(c)|+\varepsilon').$$

そこで,任意に$\varepsilon > 0$を与え,ε'を

$$0 < \varepsilon' < 1\,, \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|f(c)|+|g(c)|+1}$$

となるようにとり, $\delta > 0$を上のようにとれば, $0 < |x-c| < \delta$のとき

$$|f(x)g(x)-f(c)g(c)| < \varepsilon.$$

従って,fgは連続である.

最後に$\frac{f}{g}$の連続性を示す. fgの連続性より,$\frac{1}{g}$の連続性,つまり $\frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{g(c)}$を示せば十分である.

$\varepsilon' > 0$を$\varepsilon' < \frac{|g(c)|}{2}$となるように与えると,$\delta > 0$が存在して

$$0 < |x-c| < \delta \implies |g(x)-g(c)| < \varepsilon'\,, |g(x)| > \frac{|g(c)|}{2}$$

が成り立つ.このとき

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(c)}\right| = \frac{|g(c)-g(x)|}{|g(c)||g(x)|} < \frac{2\varepsilon'}{|g(c)|^2}.$$

そこで,任意に$\varepsilon > 0$を与え, ε'を

$$0 < \varepsilon' < \frac{|g(c)|}{2}\,, \varepsilon' < \frac{|g(c)|^2}{2}\varepsilon$$

をみたすようにとり, $\delta > 0$を上のようにとれば, $0 < |x-c| < \delta$のとき

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(c)}\right| < \varepsilon.$$

従って$\frac{1}{g}$は連続である. (Q.E.D.)

(定理 1.3.3) $y = f(x)$が$x = a$で連続で, $z = g(y)$が$y = b = f(a)$で連続ならば, $x_n \to a$となるような任意の数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$に対して

$$f(x_n) \to f(a) = b \ (n \to \infty)$$

であるから,

$$g \circ f(x_n) = g\big(f(x_n)\big) \to g(b) = g\big(f(a)\big) = g \circ f(a) \ (n \to \infty). \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

(定理 1.3.4) $S=\{x\in[a,b]: f(x)<y\}$とすると,仮定より$a\in S$であるからSは空でない.また$S\subseteq[a,b]$よりSは有界であり,従って定理 1.2.8 より最小上界$c=\sup S$が存在する.このとき

$$^\exists x_n\ [x_n\to c].$$

fは連続だから,

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\le y$$

が成り立つ.ここで定理 1.2.4 を用いた.

もし$f(c)<y$ならば,$\lim_{n\to\infty}f\left(c+\frac{1}{n}\right)=f(c)<y$なので

$$^\exists n\ \left[f\left(c+\frac{1}{n}\right)<y\right].$$

これは$c+\frac{1}{n}\in S$を意味し,cがSの上界であることに矛盾する.よって$f(c)=y$. (Q.E.D.)

(定理 1.3.5) $c\in[a,b]$において連続であることを示す.任意に$\varepsilon>0$をとり,

$$y_+=\min\{f(c)+\varepsilon,f(b)\}\ ,y_-=\max\{f(c)-\varepsilon,f(a)\}$$

とすると,$y_\pm\in[f(a),f(b)]$であるから,仮定より

$$^\exists x_\pm\in[a,b]\ [f(x_\pm)=y_\pm]\ (\text{複号同順}).$$

$y_+=f(b)$のとき$x_+=b$, $y_-=f(a)$のとき$x_-=a$としておく.

このとき,fの単調増加性より$x_-\le c\le x_+$であるから,$\delta=\min\{x_+-c\ ,c-x_-\}$とすれば,任意の$x$に対し,

$$|x-c|\le\delta\ \Rightarrow\ x_-\le x\le x_+\ \Rightarrow f(c)-\varepsilon\le f(x)\le f(c)+\varepsilon\ \Rightarrow\ |f(x)-f(c)|\le\varepsilon.$$

よってfは連続である. (Q.E.D.)

(定理 1.3.6) 中間値の定理(定理 1.3.4)より,

$$^\forall y\in[f(a),f(b)]^\exists x\in[a,b]\ [f(x)=y].$$

fは狭義単調増加なので,このようなxはただ一つである.そこで$y\in[f(a),f(b)]$に対し,この$x\in[a,b]$を対応させる関数f^{-1}を考えることができ,さらに定理 1.3.5 によりf^{-1}は連続となる. (Q.E.D.)

(定理 1.3.7) まず(1)を示す.背理法を用いるため,fが有界でないとすると,

$$^\forall n\in\mathbb{N}^\exists x_n\in[a,b]\ [|f(x_n)|>n].$$

Bolzano-Weierstrass の定理(系 1.2.10)より,数列$(x_n)_{n=1}^\infty$は収束部分列$\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^\infty$を持つ.

$x_0=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$とすると$x_0\in[a,b]$であり, fの連続性より

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right).$$

これは$\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|>n_k\to\infty$に矛盾する.よって$f$は有界である.

次に(2)を示す.$M=\sup\{f(x): x\in[a,b]\}$とすると,

$$^\exists x\in[a,b]\ [f(x)=M]$$

が成り立つことを示せばよい.(1)よりfは有界だから,$M < +\infty$である. Mは最小上界なので,

$$^\forall n \in \mathbb{N}\, ^\exists x_n \in [a,b] \left[f(x_n) > M - \frac{1}{n} \right]$$

従って,(1)と同様に数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$の収束部分列を$\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$,その極限値を$x_0(\in [a,b])$とすると,$f$の連続性より

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) \geq \lim_{k\to\infty}\left(M - \frac{1}{n_k}\right) = M.$$

一方, Mはfの値域の上界であったから $f(x_0) \leq M$.よって$f(x_0) = M$となるから,fは最大値を持つ.最小値についても同様に示される.

最後に(3)を示す.背理法を用いるため, fが一様連続でないとすると,

$$^\exists \varepsilon > 0\, ^\forall \delta > 0\, ^\exists x, y \in [a,b]\ [|x-y| < \delta\,, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon]$$

すなわち,

$$^\exists \varepsilon > 0\, ^\forall n \in \mathbb{N}\, ^\exists x_n, y_n \in [a,b] \left[|x_n - y_n| < \frac{1}{n}\,, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \right]$$

が成り立つ. (1)と同様に数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$の収束部分列をそれぞれ$\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}, \left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$,その極限値をそれぞれ$x_0, y_0$とすると,

$$\left|y_{n_k} - x_0\right| \leq \left|y_{n_k} - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x_0\right| \to 0\ (k \to \infty).$$

よって$y_{n_k} \to x_0$である. fの連続性より,

$$\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0.$$

これは$^\forall n \in \mathbb{N}\ [|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon]$に矛盾する.よって$f$は一様連続である.　　　　(Q.E.D.)

付録 B 問題の解答

この講義ノートでとりあげた問題の解答です.講義で紹介された問題や,筆者が勝手に加えた問題をいくつか掲載しましたが,質・量ともにまだまだ不十分なので,気が向いたら別の機会に問題集を作りたいと思っています.

(Ex1.1.1)

(1) 真(「任意の実数xに対し,x^2は 0 以上となる」… 自明)

(2) 真(「ある実数xが存在して,x^2は 0 以下となる」… $x = 0$とすると$x^2 = 0$)

(3) 偽(「任意の実数xに対してある実数yが存在して,$x = y^2$となる」… 反例: $x = -1$)

(Ex1.1.2)

(1) $^\exists x \in \mathbb{R}\ [x \leq 0]$

(2) $^\forall a \in \mathbb{R}\, ^\exists \varepsilon > 0\, ^\forall N \in \mathbb{N}\, ^\exists n \geq N\ \left[\left|\frac{1}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right]$

(Ex1.2.1)

(1) 任意に$\varepsilon > 0$を与え,$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$($\lfloor\cdot\rfloor$は Gauss 記号[7])とすると,$n \geq N$のとき

$$|a_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon.$$

よって数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$は 1 に収束する.

(2) 任意に$\varepsilon > 0$を与え,$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$とすると,$n \geq N$のとき

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} < \varepsilon.$$

よって数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$は 0 に収束する.

(3) 任意に$a \in \mathbb{R}$を与え,$\varepsilon = 1$とすると,

$$|a_{N+1} - a| + |a_N - a| \geq |(a_{N+1} - a) - (a_N - a)| = |a_{N+1} - a_N| = |(-1)^{N+1} - (-1)^N| = 2.$$

よって$|a_{N+1} - a|, |a_N - a|$の内少なくとも一方は$1 (= \varepsilon)$以上だから,数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$は発散する.

---

[7] Gauss 記号は,実数に対してその値より大きくない最大の整数を与えます.たとえば

$$\lfloor 2.8 \rfloor = 2,\ \lfloor 5 \rfloor = 5,\ \lfloor \pi \rfloor = 3,\ \lfloor -\sqrt{10} \rfloor = -4$$

といった具合です.また,Gauss 記号のことを床関数という場合があり,それに対して天井関数(実数に対してその値より小さくない最小の整数を与える関数)も存在します.

(Ex1.2.2)

$s_n = \sup\{x_m : m \geq n\}$とする.$n$が偶数のとき$s_n = 1 + \frac{1}{n}$, nが奇数のとき$s_n = 1 + \frac{1}{n+1}$であるから,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

(Ex.1.2.3)

(1) 題意の級数の各項について絶対値をとってできる級数について,その第N部分和は

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) < 2.$$

よって$\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\right)_{N=1}^{\infty}$は上に有界な単調増加列だから,公理 1.2.6 により収束する.これは題意の級数が絶対収束することを意味するから,定理 1.2.13 により題意の級数も収束する.

(2) 題意の級数の第n項をa_nとする.$\varepsilon = \frac{1}{4}$とすると,$^\forall N \in \mathbb{N}$に対して$m \geq N$のとき,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{2m+1} a_n\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{2m} a_n\right| \geq \left|\sum_{n=N+1}^{2m+1} a_n - \sum_{n=N+1}^{2m} a_n\right| = |a_{2m+1}| = \left|\frac{-\sqrt{2m+1}}{\sqrt{2m+2}}\right| = \sqrt{1 - \frac{1}{2m+2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}.$$

よって$\left|\sum_{n=N+1}^{2m+1} a_n\right|$, $\left|\sum_{n=N+1}^{2m} a_n\right|$の内少なくとも一方は$\frac{1}{4}(=\varepsilon)$以上だから,Cauchy の収束条件(系 1.2.12)により題意の級数は発散する.

(3) 題意の級数の第N部分和は

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N < 1.$$

よって$\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right)_{N=1}^{\infty}$は上に有界な単調増加列だから,公理 1.2.6 により収束する.

(Ex1.2.4)

(1) $\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 (-x)^{n-1}dx$より,題意の級数の第$N$部分和は

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N}\int_0^1 (-x)^{n-1}dx = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{N}(-x)^{n-1}\right)dx = \int_0^1 \frac{1-(-x)^N}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{(-x)^N}{1+x}dx.$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2$$

であり,また

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^N}{1+x}dx\right| = \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}dx \le \int_0^1 x^N dx = \left[\frac{x^{N+1}}{N+1}\right]_0^1 = \frac{1}{N+1}$$

となるから,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \log 2\right| \le \frac{1}{N+1} \to 0 \ (N \to \infty).$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

(2) $\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{(-1)^{3n}}{3n+1} = \int_0^1 (-x)^{3n} dx$より,題意の級数の第$N$部分和は

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-x)^{3n} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-x^3)^n\right) dx = \int_0^1 \frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx - \int_0^1 \frac{(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}dx.$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x+x^2)(1+x)}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{2-x}{1-x+x^2} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1-2x}{1-x+x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x+x^2)'}{1-x+x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{6}[\log(1-x+x^2)]_0^1 + \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 + \frac{1}{3}[\log(1+x)]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2$$

であり,また

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}dx\right| = \int_0^1 \frac{x^{3N+3}}{1+x^3}dx \le \int_0^1 x^{3N+3}dx = \left[\frac{x^{3N+4}}{3N+4}\right]_0^1 = \frac{1}{3N+4}$$

となるから,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1} - \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2\right)\right| \le \frac{1}{3N+4} \to 0 \ (N \to \infty).$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2$$

(Ex1.2.5)
題意の級数の第N部分和をS_Nとすると, $(S_N)_{N=1}^{\infty}$は単調増加列である.また,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \leq 1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\right) < 3$$

であるから, $(S_N)_{N=1}^{\infty}$は上に有界である.よって,公理 1.2.6 により$(S_N)_{N=1}^{\infty}$は収束する.

次に, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$に対して$\lim_{n\to\infty} a_n = e$を示す.補題として次の Bernoulli の不等式を示しておく.

補題(Bernoulli の不等式) $h \geq -1$かつ$n \in \mathbb{N}$のとき,

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

[証明] nに関する帰納法で示す.
(ｉ) $n = 1$のとき
$(\text{左辺}) = (\text{右辺}) = 1 + h$より,明らかである.
(ⅱ) $n = k (\in \mathbb{N})$において与式の成立を仮定すると,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) = 1 + (k+1)h + kh^2 \\ &\geq 1 + (k+1)h = (\text{右辺}) \ (\because h \geq -1).\end{aligned}$$

よって$n = k+1$のときも成り立つ.
(ｉ),(ⅱ)より,与式は$^{\forall}n \in \mathbb{N}$で成り立つ. (Q.E.D.)

まずa_nが収束することを示す.$n \geq 2$のとき,補題より

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \\ &\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{n^3+1}{n^3} > 1.\end{aligned}$$

また,二項定理より

$$\begin{aligned}a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.\end{aligned}$$

よって数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$は単調増加かつ上に有界だから,公理 1.2.6 により収束し,その極限値をaとすると$a \leq e$が成り立つ.
次に$a \geq e$を示す.$N \in \mathbb{N}$を固定し, $n \geq N$とすると,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{1}{n^k}$$
$$= 1+1+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k!}\cdot\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}$$
$$= 1+1+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{N-1}{n}\right)^k.$$

よって,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{N-1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!} = S_N.$$

従って,$^\forall N \in \mathbb{N}$で$a \geq S_N$が成り立つから,定理 1.2.4 より

$$a \geq \lim_{n\to\infty} S_N = e.$$

以上より, $a = \lim_{n\to\infty} a_n = e$である.

(Ex1.3.1)

(1) (ⅰ) $x > 0$において連続であることを示す.任意に$c > 0$をとる.任意の$\varepsilon > 0$に対して $\delta = \sqrt{c}\varepsilon\ (>0)$とすれば,$|x-c| < \delta$のとき

$$|f(x)-f(c)| = \left|\sqrt{x}-\sqrt{c}\right| = \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} < \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon.$$

(ⅱ) $x = 0$において連続であることを示す. 任意の$\varepsilon > 0$に対して$\delta = \varepsilon^2\ (>0)$とすれば,$|x| < \delta$のとき

$$|f(x)-f(0)| = \sqrt{x} < \varepsilon.$$

(ⅰ),(ⅱ)より, $f(x) = \sqrt{x}$は$x \geq 0$において連続である.

(2) 任意に$c > 0$をとる.$|x-c| < \frac{1}{2}c$のとき,$x > \frac{1}{2}c$より

$$|f(x)-f(c)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right| = \frac{|x-c|}{cx} < \frac{|x-c|}{\frac{1}{2}c^2}.$$

そこで,任意の$\varepsilon > 0$に対して$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c^2\varepsilon\right\}\ (>0)$とすれば, $|x-c| < \delta$のとき

$$|f(x)-f(c)| < \frac{|x-c|}{\frac{1}{2}c^2} < \frac{\frac{1}{2}c^2\varepsilon}{\frac{1}{2}c^2} = \varepsilon.$$

よって$f(x) = \frac{1}{x}$は$x > 0$において連続である.

(3) $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$であるから,任意に点$c$と$\varepsilon > 0$を与えると,十分大きな$n$が存在して

$$a^c\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) < \varepsilon$$

とできる.そこで$u, v \in \mathbb{Q}$を$u < c < v$, $v-u < \frac{1}{n}$となるように選ぶと

$$a^v - a^u = a^u(a^{v-u} - 1) < a^c\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon$$

となる.従って$\delta > 0$を$u < c - \delta < c < c + \delta < v$となるように選ぶと,$|x - c| < \delta$のとき

$$|a^x - a^c| < a^v - a^u < \varepsilon.$$

よって$f(x) = a^x$は$x \in \mathbb{R}$において連続である.

(Ex1.3.2)

任意に$c \in \mathbb{R}$をとると,fの連続性より

$$^\forall\varepsilon > 0 \, ^\exists\delta > 0 \, [|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon].$$

一般に, $a, b \in \mathbb{R}$に対して不等式$\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$が成り立つから, $|x - c| < \delta$のとき

$$\big||f(x)| - |f(c)|\big| \le |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

よって$|f|$も連続である.

(Ex1.3.3)

方程式の最高次の係数は 1 としてよい.n次方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

に対し,多項式関数

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

を考えると, nは奇数なので

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) = -\infty.$$

よって

$$^\exists b > 0 \, [f(b) > 0 \, , f(-b) < 0]$$

となる.中間値の定理(定理 1.3.4)より$(-b, b)$の点cで$f(c) = 0$となるものが存在する.これはもとの方程式の実解に他ならない.

(Ex1.3.4)

(1) 任意の$x, y \in \mathbb{R}$に対して

$$|f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x - y|$$

が成り立つから,任意に与えられた$\varepsilon > 0$に対し$\delta = \varepsilon$とすれば,一様連続の定義を満足する.よって$f(x) = \sin x$は$x \in \mathbb{R}$において一様連続である.

(2) $f(x) = e^x$が$x \in \mathbb{R}$において一様連続であると仮定する.このとき任意に与えられた$\varepsilon > 0$に対してある$\delta > 0$が存在して,

あとがき

$$|x-y|<\delta \implies |e^x-e^y|<\varepsilon$$

が成り立つ.ここで$y=\log n\ (n\in\mathbb{N})$とおくと,この式は

$$\log n-\delta<x<\log n+\delta \implies \log(n-\varepsilon)<x<\log(n+\varepsilon)$$

と書ける.これが成り立つためには

$$\log n+\delta\le\log(n+\varepsilon)$$

とならなければならない.これは$\delta\le\log\frac{n+\varepsilon}{n}$を意味するが,対数関数の連続性より$n\to\infty$のとき右辺は 0 に収束するので,$\delta>0$が存在するという最初の仮定と矛盾する.従って,$f(x)=e^x$は$x\in\mathbb{R}$において一様連続でない.

(3) $x_n=\frac{2}{4n+1}$,$y_n=\frac{2}{4n-1}$とおくと,$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$であるが,$\varepsilon=2$に対して

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\sin\frac{4n+1}{2}\pi-\sin\frac{4n-1}{2}\pi\right|=2\ge\varepsilon$$

となるから,$f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$は$0<x<1$において一様連続でない.

～あとがき～

…やっと終わりました.これから微分以降のシケプリも作らなくちゃいけないのか、と思うと先が思いやられる次第です.

本当はもっとたくさんコメントとか図とか盛り込んで理解の助けにしたかったのですが,筆者の気力が追い付かないのでとりあえずこんなところで.時間があったら改良してゆきたいとは思ってます.

急いで作ったので,論理的飛躍・不整合や厳密性に欠ける記述を見かけることがあるかも知れません.そんなときは髙橋までお知らせいただけると嬉しいです.その他質問などもできる範囲で答えます.

最後に,ここまでお読みいただきありがとうございました!

2009 年 6 月 8 日　　髙橋　一史

更新履歴

この講義ノートの更新履歴です.主に間違いの訂正をしてゆきます.
訂正箇所は,本文では青く染めてあります.

2009.6.9	本講義ノート公開!
2009.6.15	更新履歴追加
2009.6.15	$(p.5, l.8)$ $f(x_n) = \alpha$ ☞ $f(x_n) \to \alpha$
2009.7.31	ヘッダーを追加(どうでもいいけど)