～レポート解答～ 第2回

1. $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2l^2E}{\mu(Gm_1m_2)^2}}$ を示せ

エネルギー保存則より、$\frac{\mu}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-\frac{Gm_1m_2}{r}=E\cdots①$

角運動量は保存されるので、$l=\mu r^2\frac{d\theta}{dt}$ ∴ $\frac{d\theta}{dt}=\frac{l}{\mu r^2}\cdots②$

rはθを通してtに依存するので、$\frac{dr}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{d\theta}=\frac{l}{\mu r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\cdots③$

円錐曲線の式 $r=\frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}$ $\left(a=\frac{l^2}{\mu Gm_1m_2}\right)$ から、 $\cdots④$

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{a\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}=\frac{r\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

③より、$\frac{dr}{dt}=\frac{l}{\mu r^2}\cdot\frac{r\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}=\frac{l\varepsilon\sin\theta}{\mu r(1+\varepsilon\cos\theta)}\cdots⑤$

②,⑤を①に代入して、$\frac{\mu}{2}\left[\left\{\frac{l\varepsilon\sin\theta}{\mu r^2(1+\varepsilon\cos\theta)}\right\}^2+\frac{l^2}{\mu^2r^2}\right]-\frac{Gm_1m_2}{r}=E$

④より、$\frac{l^2\varepsilon^2\sin^2\theta}{2\mu a^2}+\frac{l^2(1+\varepsilon\cos\theta)^2}{2\mu a^2}-\frac{(1+\varepsilon\cos\theta)Gm_1m_2}{a}=E$

$$l^2(1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2)-2\underbrace{\mu aGm_1m_2}_{l^2}(1+\varepsilon\cos\theta)=2\mu a^2E$$

∴ $l^2(\varepsilon^2-1)=2\mu a^2E$

$$\varepsilon^2=1+\frac{2\mu a^2E}{l^2}=1+\frac{2l^2E}{\mu(Gm_1m_2)^2}$$

ε>0より、 $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2l^2E}{\mu(Gm_1m_2)^2}}$ //

2. 半径a, 角運動量lで等速円運動する人工衛星の速さを$\alpha(>0)$倍して $\varepsilon, r_{min}, r_{max}$ を求めよ

加速前の等速円運動の速さv_0とすると,
運動方程式 $m\frac{v_0^2}{a}=\frac{GmM}{a^2}$ $\therefore v_0=\sqrt{\frac{GM}{a}}$

加速後のエネルギーE'は, $E'=\frac{1}{2}m(\alpha v_0)^2-\frac{GmM}{a}=\frac{GmM}{a}\left(\frac{\alpha^2}{2}-1\right)$
角運動量l'は, $l'=ma(\alpha v_0)=m\alpha\sqrt{aGM}$

2次曲線 $r=\frac{K}{1+\varepsilon\cos\theta}$ において,

前問より, $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2E'}{\mu}\left(\frac{l'}{GmM}\right)^2}\fallingdotseq\sqrt{1+\frac{GmM(\alpha^2-2)}{ma}\left(\frac{m\alpha\sqrt{aGM}}{GmM}\right)^2}$ ($\because m\ll M$より, $\mu\fallingdotseq m$)

$=\sqrt{1+\alpha^2(\alpha^2-2)}=\sqrt{(\alpha^2-1)^2}=|\alpha^2-1|$

$K\fallingdotseq\frac{l'^2}{m\cdot GmM}=\alpha^2R$ なので, $r=\frac{\alpha^2R}{1+|\alpha^2-1|\cos\theta}$

2次曲線はεの値に伴って軌道が異なるので, 場合分けをする

i) $\alpha>\sqrt{2}$のとき, $\varepsilon>1$より, 軌道は双曲線

$r=\frac{\alpha^2R}{1+(\alpha^2-1)\cos\theta}$　$\theta=0$で, $r_{min}=R$, r_{max}はない

ii) $\alpha=\sqrt{2}$のとき, $\varepsilon=1$より, 軌道は放物線

$r=\frac{2R}{1+\cos\theta}$　$\theta=0$で, $r_{min}=R$, r_{max}はない

iii) $0<\alpha<1$, $1<\alpha<\sqrt{2}$のとき, $0<\varepsilon<1$より, 軌道は楕円
$0<\alpha<1$のとき, $r=\frac{\alpha^2R}{1+(1-\alpha^2)\cos\theta}$　$\theta=0$で, $r_{min}=\frac{\alpha^2R}{2-\alpha^2}$, $\theta=\pi$で, $r_{max}=R$
$1<\alpha<\sqrt{2}$のとき, $r=\frac{\alpha^2R}{1+(\alpha^2-1)\cos\theta}$　$\theta=0$で, $r_{min}=R$, $\theta=\pi$で, $r_{max}=\frac{\alpha^2R}{2-\alpha^2}$

iv) $\alpha=1$のとき, $\varepsilon=0$より, 軌道は円なので, 当然 $r_{min}=r_{max}=R$

ゆえに, $0<\alpha<1$のとき, $0<\varepsilon<1$, $r_{min}=\frac{\alpha^2R}{2-\alpha^2}$, $r_{max}=R$　$\alpha=1$のとき, $\varepsilon=0$, $r_{min}=r_{max}=R$
$1<\alpha<\sqrt{2}$のとき, $0<\varepsilon<1$, $r_{min}=R$, $r_{max}=\frac{\alpha^2R}{2-\alpha^2}$　$\alpha=\sqrt{2}$のとき, $\varepsilon=1$, $r_{min}=R$, r_{max}は存在しない
$\sqrt{2}<\alpha$のとき, $\varepsilon>1$　$r_{min}=R$, r_{max}は存在しない //