〜レポート解答〜 第1回

1. 速度に比例する抵抗力 $f=-m\gamma v$ があるときの落下運動

(a) 時定数 $\tau=\frac{1}{\gamma}$, 終端速度 $v_T=\frac{g}{\gamma}$ を計算せよ

(ただし, $f=-6\pi R\eta v$, $R=3.0\times10^{-6}\,m$, η(空気の粘性率)$=1.8\times10^{-5}\,Pa\cdot s$, ρ(密度)$=9.3\times10^{2}\,(kg/m^3)$)

$-m\gamma v=-6\pi R\eta v$ として,

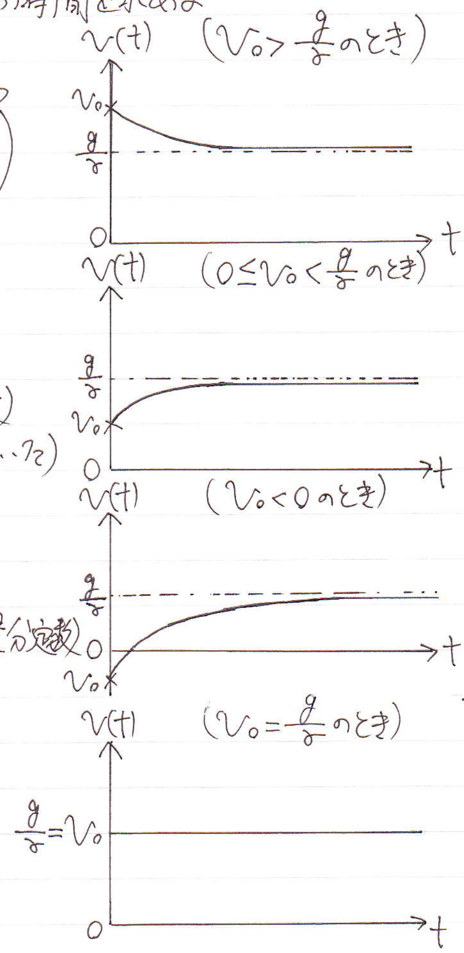
$$\frac{1}{\gamma}=\frac{m}{6\pi R\eta}=\frac{\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3}{6\pi R\eta}=\frac{2}{9}\times\frac{\rho R^2}{\eta}=\frac{3.1}{3}\times10^{-4}\fallingdotseq1.0\times10^{-4}\,(s)=\tau$$

$$v_T=9.8\times\frac{3.1}{3}\times10^{-4}\fallingdotseq1.0\times10^{-3}\,(m/s)$$

$\underline{\tau=1.0\times10^{-4}\,(s),\ v_T=1.0\times10^{-3}\,(m/s)}$ //

(b) 初速度 v_0 のときの $v(t)$ を求め, 大まかなグラフを書け
$v_0<0$ のときは, 最高点に達するまでの時間を求めよ

運動方程式 $m\frac{dv}{dt}=mg-m\gamma v$ が成り立つ
($v<0$ のときは抵抗力が逆向きにはたらくが, v が負のため, 同じ式で扱うことができる)



i) で出た $v(t)$ を v_0 と $\frac{g}{\gamma}$ の大小比較によって3種類のグラフで表現する

$$\frac{dv}{dt}=g-\gamma v=-\gamma\left(v-\frac{g}{\gamma}\right)$$

i) $v\neq\frac{g}{\gamma}$ のとき, $\frac{1}{v-\frac{g}{\gamma}}\cdot\frac{dv}{dt}=-\gamma$

$$\ln\left|v-\frac{g}{\gamma}\right|=-\gamma t+\alpha\quad(\alpha:\text{積分定数})$$

$$v=\frac{g}{\gamma}+Ae^{-\gamma t}\quad(A=\pm e^{\alpha}\text{とおいた})$$

$t=0$ のとき, $v=v_0$ より, $A=v_0-\frac{g}{\gamma}$

ゆえに, $v(t)=\frac{g}{\gamma}+\left(v_0-\frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}$ //

ii) $v=\frac{g}{\gamma}$ のとき, $\frac{dv}{dt}=0$ なので, $v=\beta$ (β:積分定数)

$t=0$ のとき, $v=v_0$ より, $\beta=v_0$

ゆえに, $v(t)=v_0\left(=\frac{g}{\gamma}\right)$ //

このうち $v_0<0$ であるのは, 上から3番目のグラフのときで,
$v(t)=0$ とすると,

$$\left(\frac{g}{\gamma}-v_0\right)e^{-\gamma t}=\frac{g}{\gamma}$$

$$e^{-\gamma t}=\frac{g}{g-\gamma v_0}$$

$$t=-\frac{1}{\gamma}\ln\frac{g}{g-\gamma v_0}=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{g-\gamma v_0}{g}$$

よって, 最高点に達するまでの時間は $\frac{1}{\gamma}\ln\frac{g-\gamma v_0}{g}$ //

No.

Date

2. 速度の2乗に比例する抵抗力があるときの$v(t)$と$x(t)$を求めよ ($t=0$のとき, $v=0$)

$$m\frac{dv}{dt}=mg-m\gamma v^2$$

$$\frac{dv}{dt}=g-\gamma v^2$$

$$\frac{1}{g-\gamma v^2}\cdot\frac{dv}{dt}=1$$

$$\frac{1}{(\sqrt{g}+\sqrt{\gamma}v)(\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}v)}\cdot\frac{dv}{dt}=1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{\gamma}v}+\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}v}\right)\frac{dv}{dt}=1$$

$$\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}+\sqrt{\gamma}v}-\frac{-\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}v}\right)\frac{dv}{dt}=2\sqrt{g\gamma}$$

$$\rightarrow \therefore \ln|\sqrt{g}+\sqrt{\gamma}v|-\ln|\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}v|=2\sqrt{g\gamma}t+\alpha$$

(α:積分定数)

$$\ln\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\gamma}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}v}\right|=2\sqrt{g\gamma}t+\alpha$$

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\gamma}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}v}=\pm e^{2\sqrt{g\gamma}t+\alpha}=Ae^{2\sqrt{g\gamma}t}\quad(A=\pm e^{\alpha})$$

$$\sqrt{g}+\sqrt{\gamma}v=Ae^{2\sqrt{g\gamma}t}(\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}v)$$

$$\sqrt{\gamma}(Ae^{2\sqrt{g\gamma}t}+1)v=\sqrt{g}(Ae^{2\sqrt{g\gamma}t}-1)$$

$$v=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\cdot\frac{Ae^{2\sqrt{g\gamma}t}-1}{Ae^{2\sqrt{g\gamma}t}+1}$$

$t=0$のとき, $v=0$より, $A=1$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{g\gamma}t}-1}{e^{2\sqrt{g\gamma}t}+1}=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\cdot\frac{e^{\sqrt{g\gamma}t}-e^{-\sqrt{g\gamma}t}}{e^{\sqrt{g\gamma}t}+e^{-\sqrt{g\gamma}t}}=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\tanh\sqrt{g\gamma}t$$

$$\frac{dx}{dt}=v(t)=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\cdot\frac{e^{\sqrt{g\gamma}t}-e^{-\sqrt{g\gamma}t}}{e^{\sqrt{g\gamma}t}+e^{-\sqrt{g\gamma}t}}=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{g\gamma}e^{\sqrt{g\gamma}t}-\sqrt{g\gamma}e^{-\sqrt{g\gamma}t}}{e^{\sqrt{g\gamma}t}+e^{-\sqrt{g\gamma}t}}$$

$$\therefore x=\frac{1}{\gamma}\ln(e^{\sqrt{g\gamma}t}+e^{-\sqrt{g\gamma}t})+\beta\quad(\beta:積分定数)$$

$t=0$のとき, $x=0$とすると,*1 $\beta=-\frac{1}{\gamma}\ln 2$

ゆえに, $x=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{e^{\sqrt{g\gamma}t}+e^{-\sqrt{g\gamma}t}}{2}=\frac{1}{\gamma}\ln(\cosh\sqrt{g\gamma}t)$

$$\therefore\begin{cases}v(t)=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\tanh\sqrt{g\gamma}t\\ x(t)=\frac{1}{\gamma}\ln(\cosh\sqrt{g\gamma}t)\end{cases}\quad //$$

---

*1 この条件は与えられていない…
一般化したい人は, $x=x_0$ とでもすればよいだろう。
ちなみに, xを求める際に, $\tanh\sqrt{g\gamma}t$ を直接積分しても解けると思われる。