2（方針）講義＋レポートでも何とかもっていけそうですが、
ここでは人から聞いたものをさらに聞いた方法を採用したいと思います

〈解答〉

a) 角運動量は保存されるので、$\mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = l$　$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \cdots ①$

~~力学的エネルギー保存則より、~~

$$\cancel{E = \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) - \frac{Gm_1m_2}{r}}$$

rはθを通してtに依存するので、$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\cdot\frac{l}{\mu r} \cdots ②$

力学的エネルギー保存則より、

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

①, ②より、

$$= \frac{1}{2}\mu\left\{\frac{\varepsilon^2\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\cdot\frac{l^2}{\mu^2 r^2} + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}\right\} - G\frac{m_1m_2}{r}$$

$$= \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\, l^2}{2a^2\mu} + \frac{l^2}{2\mu r^2} - G\frac{m_1m_2}{r} \quad (\because (1))$$

$$= \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\, l^2}{2\mu a^2} + \frac{l^2}{2\mu\cdot\frac{a^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}} - G\frac{m_1m_2}{\frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}}$$

（ポイント！ rにθが含まれている）

$$= \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\, l^2}{2\mu a^2} + \frac{l^2(1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)}{2\mu a^2} - \frac{Gm_1m_2(1+\varepsilon\cos\theta)}{a}$$

$$= \frac{l^2}{2\mu a^2} + \frac{\varepsilon^2 l^2}{2\mu a^2} + \frac{\varepsilon l^2\cos\theta}{\mu a^2} - \frac{Gm_1m_2}{a} - \frac{\varepsilon Gm_1m_2\cos\theta}{a}$$

$$= \frac{l^2(1+\varepsilon^2)}{2\mu a^2} - \frac{Gm_1m_2}{a} + \frac{\varepsilon l^2\cos\theta}{\mu a^2} - \frac{\varepsilon Gm_1m_2\cos\theta}{a}$$

この式が全てのθについて成り立つと考えて、θに関する恒等式とみると、（ポイント！）

$$E = \frac{l^2(1+\varepsilon^2)}{2\mu a^2} - \frac{Gm_1m_2}{a}, \quad 0 = \frac{\varepsilon l^2}{\mu a^2} - \frac{\varepsilon Gm_1m_2}{a}$$

第2式より、$\mu a G m_1 m_2 = l^2$　$\therefore a = \frac{l^2}{\mu G m_1 m_2}$

第1式より、$\frac{l^2(1+\varepsilon^2)}{2\mu a^2} = \frac{Gm_1m_2}{a} + E$

$$1+\varepsilon^2 = 2 + \frac{2l^2E}{\mu(Gm_1m_2)^2}$$

$\varepsilon \geq 0$より、$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{\mu(Gm_1m_2)^2}}$

//

（計算グチャグチャで申し訳ないです。
もう少し綺麗にやればいいのですが）