力学 08' 解答

1 (方針) 講義で扱った強制振動の例に類似する
ただし、右辺は $F_0\cos\omega t$ から $F_0\sin\omega t$ となっていることと、
$\gamma=0$ の形でなっていることに注意する

〈解答〉

a)
$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\dfrac{F_0}{m}\sin\omega t\\[2mm]\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2y=\dfrac{F_0}{m}\cos\omega t\end{cases}$$ とする

$z=y+ix$ とすると、$\dfrac{d^2z}{dt^2}+\omega_0^2z=\dfrac{F_0}{m}e^{i\omega t}$

この z の虚数部が x を与える

$z=Ae^{i\omega t}$ とおくと、

$$(-\omega^2+\omega_0^2)Ae^{i\omega t}=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$A=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

$$z=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}e^{i\omega t}$$

$$\therefore x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t$$

→ 一般解は減衰振動の一般解を加えて、(ポイント!)

$$x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t+a\cos(\omega_0t+\phi)$$ //

注

減衰振動の一般解は

$$x=ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_1t+\phi)$$

$\left(\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\right)$ であったが、

$\gamma=0$ の形であることに留意する必要がある

b) $$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t-a\omega_0\sin(\omega_0t+\phi)$$

$t=0$ のとき、$x=a\cos\phi=0\cdots①$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}-a\omega_0\sin\phi=0\cdots②$$

①, ②より、$\phi=\dfrac{\pi}{2}$, $a=\dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{\omega}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}$

$$\therefore x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0t\right)$$ //

注

ϕ は本当は $\phi=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ だが、その場合でも解答と一致する(はず)
講義中はよく1つの ϕ を選んでいったため、この方法を採用する

c) ロピタルの定理より、

$$\lim_{\omega\to\omega_0}x=-\frac{F_0}{2m}\cdot\frac{1}{\omega}\left(t\cos\omega t-\frac{\sin\omega_0t}{\omega_0}\right)$$

$$=\frac{F_0}{2m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2}(\sin\omega_0t-\omega_0t\cos\omega_0t)$$ //

グラフは…省略…て (ゴメン!!)