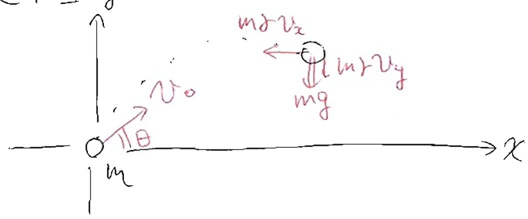
力学（'09）

[1]



a) $\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = -m\gamma v_x & \cdots (1) \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -mg - m\gamma v_y & \cdots (2) \end{cases}$

(1) より $\dfrac{dv_x}{v_x} = -\gamma\, dt$

$\ln v_x = -\gamma t + A$ （∵ A：積分定数）

$v_x = e^{-\gamma t}\cdot e^{A}$ … (3)

$v_x(0) = v_0\cos\theta$ から (3)と併せて $v_x = (v_0\cos\theta)e^{-\gamma t}$ … (4)

(2) より $\dfrac{dv_y}{v_y+\frac{g}{\gamma}} = -\gamma\, dt$

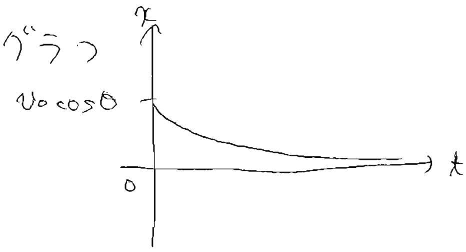
$\ln\left|v_y + \frac{g}{\gamma}\right| = -\gamma t + B$ （∵ B：積分定数）

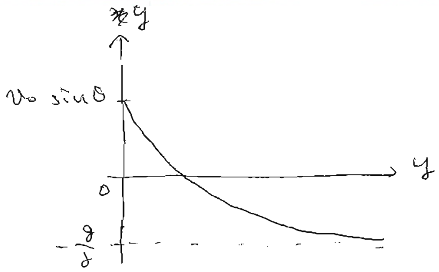
$v_y = e^{-\gamma t}\cdot e^{B} - \frac{g}{\gamma}$ … (5)

$v_y(0) = v_0\sin\theta$ から (5)と併せて

$v_y = \left(v_0\sin\theta + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}$ … (6)

グラフ





b) 最高点では $v_y = 0$

(6) より $t_{MAX} = \dfrac{1}{\gamma} \ln \dfrac{\gamma v_0 \sin\theta + g}{g}$ //

(4) に代入して $v_x(t_{MAX}) = (v_0 \cos\theta) \dfrac{g}{\gamma v_0 \sin\theta + g}$ //

$$x(t_{MAX}) = \int_0^{t_{MAX}} v_x \, dt = \left[-\frac{v_0 \cos\theta}{\gamma} e^{-\gamma t} \right]_0^{t_{MAX}}$$

$$= \frac{v_0 \cos\theta}{\gamma} \left(1 - \frac{g}{\gamma v_0 \sin\theta + g} \right)$$

$$= \frac{\cancel{\gamma}\, v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{\cancel{\gamma}(\gamma v_0 \sin\theta + g)} \quad //$$

c) $t \to \infty$ の時最大

$$x_{MAX} = \int_0^{\infty} v_x \, dt = \left[-\frac{v_0 \cos\theta}{\gamma} e^{-\gamma t} \right]_0^{\infty} = \frac{v_0 \cos\theta}{\gamma} \quad //$$

[2]

a) (万有引力のエネ) + (運動エネ)

$$= -\frac{GMm}{a} + \frac{1}{2} m v_0^2$$

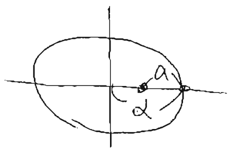
$$= -\frac{GMm}{2a} = E_0 \quad //$$

$m\dfrac{v_0^2}{a} = \dfrac{GMm}{a^2}$ から

b) $\dfrac{1}{2} m \left(\dfrac{1}{7} v_0\right)^2$ だけ増えるから $E = -\dfrac{24}{49} \cdot \dfrac{GMm}{a}$ //

角運動量 $l = \dfrac{8}{7} m v_0 a$ となるから

左のようにαをとると →



$\dfrac{\alpha}{1+\varepsilon} = a$ ここで $\alpha = \dfrac{l^2}{\mu GMm}$ なので $\alpha = \dfrac{64}{49} a$ $\therefore \varepsilon = \dfrac{15}{49}$ //

$$r_{max} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} = \frac{64}{15} a \quad //$$

[3]

a) ぶっちゃけ、よくわかりません。
まぁ、単振子運動に、コリオリの力がはたらいて
よくわかんない運動になるってことくらい書けばいいのかな…？

(b) だから よくわかんないにゃ

c) $x' = \sin\omega t \cos\omega_0 t$, $y' = \cos\omega t \cos\omega_0 t$ と認めて、
$\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$ を求め、
ω^2 の項をムシする (or $\omega_0 \pm \omega \simeq \omega_0$ とする) と、
b) の式と等しくなることを示してください。

数学的には、こんな帰納的な証明は、納得できない！
と思いますが、初等力学では、運動の記述の解は1つだと
思ってOKみたいです。

[4]

a) $I = \iiint_{球内} r^2 \rho \, dx dy dz$ を求めてください。

ノートp55〜56参照。

b) c) ノートp63〜65参照。