シケプリ

なんだかみんなの物理のお節介をやきたくなってきた。。。ので今日アップされた力学のシケプリにケチ＆訂正＆小難しい補足をつけます！！

……なんてことはなくてただ過去問２００９問い３の答えが適当なので自分で調べたらいろいろ勉強になったのでちょっと伝えてみたくなっただけ。（やっぱりお節介かねぇ）

問題

北極点での振り子の挙動

問い①

答え

振り子は単振子として固有振動数に等しい振動するとともにその振動面が地球の角速度に等しい角速度で回転する。（要するに単振子の振動面「振り子の糸が作る面というのがいいかな」が回転することが書いてあればよろしい）

北極点にぶら下がった振り子を宇宙空間（慣性系）からみるとずーっと振動したままですね。（ねっ？）でその同じ面で振動し続けている振り子を地球の人（いわゆる非慣性系）が振り子を真下から見あげたら「あー、なんか回転してるよ。すごいゆっくり。（いや一日しないと一周しないんだけどね）」となりますね。（ねっ！！）

問い②

答え

回転座標系の運動方程式

$$m\frac{d^{2}}{dt^{2}}\rightharpoonaccent{X}=-mω\_{0}^{2}\rightharpoonaccent{X}+2m\rightharpoonaccent{\frac{dX}{dt}}×\rightharpoonaccent{ω}$$

に

$$\rightharpoonaccent{X}=\left(\begin{array}{c}x\\y\\z\end{array}\right) \rightharpoonaccent{ω}=\left(\begin{array}{c}0\\0\\ω\end{array}\right)$$

を代入してｘに関する方程式とｙに関する方程式を立てれば終わり。（ｚ方向には運動しないからいいの。）

$$m\frac{d^{2}x}{dt^{2}}=-mω\_{0}^{2}x+2mω\frac{dy}{dt}$$

$$m\frac{d^{2}y}{dt^{2}}=-mω\_{0}^{2}y-2mω\frac{dx}{dt}$$

で、ここからがモンダイ。

$$w=x+iy$$

と置くと上の２式は

$$\ddot{w}+2iω\dot{w}+ω\_{0}^{2}w=0$$

という一つの式にまとまります。

$$w=e^{μt}$$

と置いて代入すると

$$μ^{2}+2iωμ+ω\_{0}^{2}=0$$

そして

$$μ=-iω\pm i\sqrt{ω\_{0}^{2}+ω^{2}}$$

ここで問題文の近似を使うと

$$μ=-iω\pm iω\_{0}$$

同じオーダーの誤差で

$$w=Ae^{μ\_{+}t}+Be^{μ\_{-}t}$$

適当に初期条件（AとB）選んで

$$w=e^{i\left(\frac{π}{2}-ωt\right)}\cos(ω\_{0}t)$$

これを複素平面（実数軸がｘに虚数軸がｙに対応します。）で考えると、早い角振動数$ω\_{0}$での単振動にゆっくりとした$ω$での回転がかかっていることが分かるでしょうか。（分かってね。）

上でもみたように問題文の連立の微分方程式は厳密に解こうとすれば解けます。けれど厳密な式を出したところで（振動面が回転するという）物理的本質が見えない。（書き下してみればわかる。）だから近似式を使って物理的意味がわかるようにしているのですね。先生の意図を読んでの第３問ですね。数学的に良くないというのは（もちろん近似してもランダウの記号を使えば数学的にも厳密にできますよ）物理的意味を理解するという目的からみれば的外れにゃのですよ。

以上で説明終わり

あと数２はあれで多分終わりです。更新の予定はありません。（過去問が新たに入ればしますが）テスト頑張りましょうね～。ではさいなら。

参考

古典力学の数学的方法（V.Iアーノルド）蟹江幸博　他　訳p125~p126

小林君ごめんね。邪魔しちゃったよ。