[1]

$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega^2 x = 0$ —①

a) $x = e^{\alpha t}$ を代入して整理

$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega^2 = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}_{\omega_1} i$

よって　ω_1 とおく

$x = A e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_1)t} + A^* e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega_1)t}$

$(\because x = x^*)$

$A = \frac{1}{2} a e^{i\phi}$ とおくと

$x = a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \phi)$ //

b) $\dot{x} = a(-\frac{\gamma}{2}) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \phi)$

$- a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi)$

初期条件 $x|_{t=0} = 0$, $\dot{x}|_{t=0} = v_0$ より

$\begin{cases} \phi = \frac{\pi}{2} \\ -a\omega_1 = v_0 \quad (\Leftrightarrow a = -\frac{v_0}{\omega_1}) \end{cases}$

$\therefore x = -\frac{v_0}{\omega_1} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{2})$

$= \frac{v_0}{\omega_1} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_1 t$ //

$\dot{x} = \frac{v_0}{\omega_1}(-\frac{\gamma}{2}) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_1 t + v_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$

c) $\omega \to \frac{\gamma}{2}$ のとき $\omega_1 \to 0$

$x = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_1 t$

$\to v_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ //

d) ①より

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) = -m\gamma\dot{x}^2$

よって求めるのは

$\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} m v_0^2) = \int_0^{\tau} m\gamma \left(-\frac{v_0\gamma}{2\omega_1} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\omega_1 t + v_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\omega_1 t\right)^2 dt$

なる τ。

(右辺) $\fallingdotseq m\gamma \int_0^{\tau} \left(-\frac{v_0^2\gamma}{\omega_1} \sin\omega_1 t \cos\omega_1 t + v_0^2 \cos^2\omega_1 t\right) e^{-\gamma t} dt$

$\int_0^{\tau} e^{-\gamma t} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t \, dt = \left[e^{-\gamma t} (-\frac{1}{4\omega_1}) \cos 2\omega_1 t\right]_0^{\tau} - \int_0^{\tau} \frac{\gamma}{4\omega_1} e^{-\gamma t} \cos 2\omega_1 t \, dt$

… $(\gamma/\omega_1)^n \ (n \geq 2)$ の項が延々とでき，ムシできる。

$\int_0^{\tau} e^{-\gamma t} \frac{1 + \cos 2\omega_1 t}{2} dt = -\frac{1}{2\gamma}(e^{-\gamma \tau} - 1) + \left[\frac{1}{4\omega_1} e^{-\gamma t} \sin 2\omega_1 t\right]_0^{\tau}$

$- \underbrace{\int_0^{\tau} \frac{-\gamma}{4\omega_1} e^{-\gamma t} \sin 2\omega_1 t \, dt}$

ムシできる

$\fallingdotseq \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-\gamma\tau}) + \frac{1}{4\omega_1} e^{-\gamma\tau} \sin 2\omega_1 \tau$

$\fallingdotseq \frac{1}{2} m v_0^2 (1 - e^{-\gamma\tau}) + \frac{\gamma}{4\omega_1} m v_0^2 e^{-\gamma\tau} \sin \omega_1 \tau$

$\frac{\gamma}{\omega_1}$ の項までムシできるとすると

$\frac{1}{4} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 - e^{-\gamma\tau})$

$\tau = \frac{1}{\gamma} \log 2$ //

No. Date

[2]

a) $U(x,y) = -\int_0^{\vec{r}} -k(\underbrace{x\vec{e_1}+y\vec{e_2}}_{(\vec{r})})\cdot d\vec{r}$

$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2$

等ポテンシャル面は原点を中心とする円。

b) $\vec{l} = m\vec{r}\times\vec{v}$

$\dot{\vec{l}} = m\dot{\vec{r}}\times\vec{v} + m\vec{r}\times\dot{\vec{v}}$

$= \vec{r}\times\vec{F}$

$= \vec{0}$

$\therefore$ $\vec{l}$ は保存される

c) 運動方程式

$\left\{\begin{array}{l} \vec{e_1}: m\ddot{x} = -kx \\ \vec{e_2}: m\ddot{y} = -ky \end{array}\right\}$ …単振動の方程式

$\therefore \vec{r} = A\cos(\omega t+\phi)\vec{e_1} + B\cos(\omega t+\theta)\vec{e_2}$ //

$(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$

d) $\vec{v} = -\omega A\sin(\omega t+\phi)\vec{e_1} - \omega B\sin(\omega t+\theta)\vec{e_2}$

初期条件 $\vec{r}|_{t=0} = a\vec{e_2}$, $\vec{v}|_{t=0} = v_0\vec{e_1}$ より

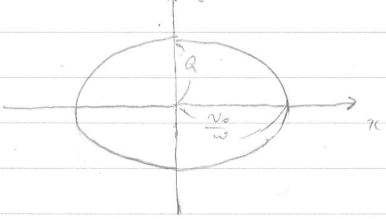
$\left\{\begin{array}{l} A\cos\phi = 0,\ B\cos\theta = a \\ -\omega A\sin\phi = v_0,\ -\omega B\sin\theta = 0 \end{array}\right.$

$\therefore \phi = \frac{\pi}{2},\ A = -\frac{v_0}{\omega}$

$\theta = 0 \quad B = a$

$\therefore r = -\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})\vec{e_1} + a\cos\omega t\,\vec{e_2}$

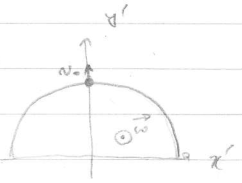
$= \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,\vec{e_1} + a\cos\omega t\,\vec{e_2}$ //



の楕円軌道 //

3

a)



運動方程式　$\omega \vec{e_3'} \times (\dot{x}' \vec{e_1} + \dot{y}' \vec{e_2'})$

$$m(\ddot{\vec{r}}')_{\Sigma'} \fallingdotseq -mg\vec{e_2'} - 2m\vec{\omega} \times (\vec{v}')_{\Sigma'}$$

$$(\leftrightarrow) \begin{cases} \cancel{m}\ddot{x}' = 2\cancel{m}\omega\dot{y}' & \text{—①} \\ \cancel{m}\ddot{y}' = -\cancel{m}g - 2\cancel{m}\omega\dot{x}' & \text{—②} \end{cases}$$

$$\dddot{x}' = -2\omega g - \underbrace{\cancel{4\omega^2 \dot{x}'}}_{\fallingdotseq 0}$$

$$\therefore x' = -\frac{1}{3}\omega g t^3 + at^2 + bt + c$$

初期条件 $x'|_{t=0} = 0$　$\dot{x}'|_{t=0} = 0$　$\ddot{x}'|_{t=0} = 2\omega v_0$ より

$$x' = -\frac{1}{3}\omega g t^3 + \omega v_0 t^2$$

落下までの時間 $\tau = \frac{2v_0}{g}$

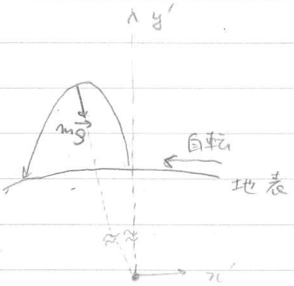
$$\therefore x'|_{t=\tau} = -\frac{1}{3}\omega g \frac{8v_0^3}{g^3} + \omega v_0 \frac{4v_0^2}{g^2} = \frac{4}{3}\omega \frac{v_0^3}{g^2} = \frac{4}{3} \cdot 7.3 \times 10^{-5} \times \frac{24.5^3}{9.8^2}$$

$$= 0.01490\cdots$$

$\fallingdotseq$ 1.5cm (赤道上で自転する方向と逆の向きへ)

$$\dot{x}'|_{t=\tau} = -\omega g \frac{4v_0^2}{g^2} + 2\omega v_0 \frac{2v_0}{g} = 0$$

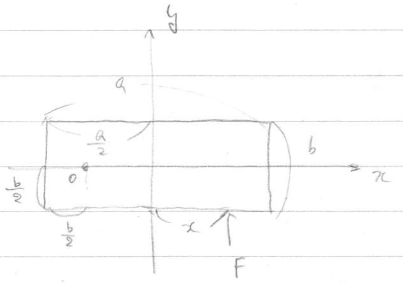
b)



重力は地球の中心方向へ働くから
静止座標系でみたとき $\vec{x}'$ 方向に力がかかる。
これにより地表より $-\vec{x}'$ 方向への速度が小さくなり
$+\vec{x}'$ 方向にずれる。

No. Date

[4]



a) $I_G = 4\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M}{ab}(x^2+y^2)\,dy\,dx$

$= \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$ //

b) $I = I_G + M\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2$

$= M\left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2\right)$ //

c) 重心の運動方程式

$M\ddot{y} = F \rightsquigarrow M\Delta\dot{y} = f \; (f \int_0^{\Delta t} F\,dt)$

O中心の回転運動の方程式

$I\dot{\omega} = F\left(x+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right) \rightsquigarrow I\Delta\omega = f\left(x+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)$

Oの初速度 0

$\Delta\dot{y} = \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\Delta\omega$

$\frac{f}{M} = \frac{a-b}{2}\cdot\frac{f\left(x+\frac{a-b}{2}\right)}{I}$

$\therefore x = \frac{2I}{M(a-b)} - \frac{a-b}{2}$

b)より I を消去して

$x = \frac{1}{6}\frac{a^2+b^2}{a-b}$ //